

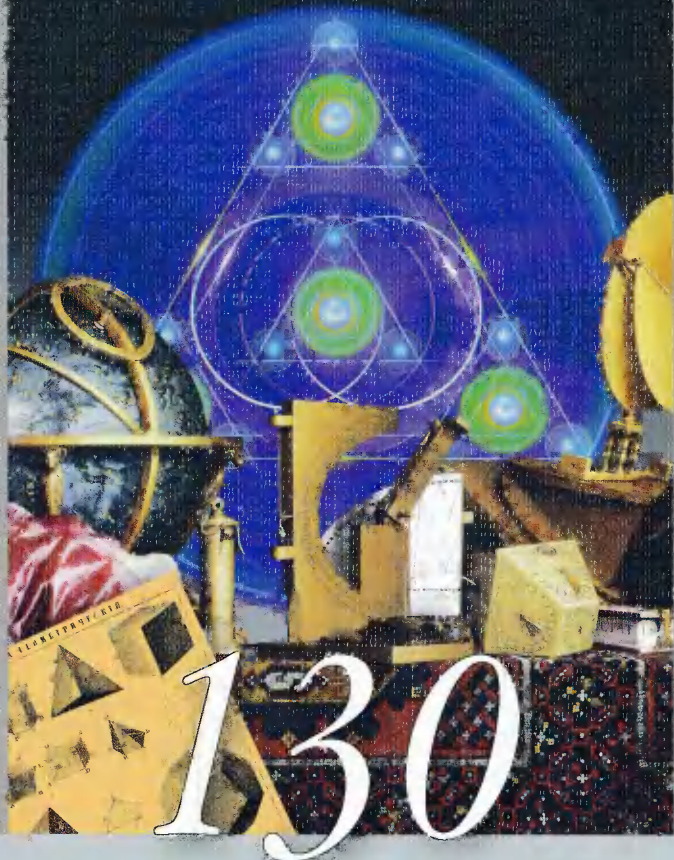
ВЫПУСК

Библиотечка КВАНТ

124



А. Толыго



НЕСТАНДАРТНЫХ ЗАДАЧ



БИБЛИОТЕЧКА

КВАНТ

ВЫПУСК

124

Приложение к журналу

«Квант» №2/2012

А. Толтыго

130

НЕСТАНДАРТНЫХ ЗАДАЧ

Из запасников
математических олимпиад

Москва
Издательство МЦНМО
2012

УДК 51(07)
ББК 22.1
Т52

Серия «Библиотечка «Квант»
основана в 1980 году

Толпыго А.
Т52 130 нестандартных задач – М.: Издательство МЦНМО,
2012. – 160 с. (Библиотечка «Квант». Вып. 124. Приложение
к журналу «Квант» №2/2012.)

ISBN 978-5-4439-0301-9

Предлагаемые задачи составлялись на протяжении более чем 40 лет для различных олимпиад.

Все задачи в том или ином смысле нестандартные. Их решение требует смекалки, сообразительности, а иногда и многочасовых размышлений.

Книга предназначена для учителей математики, руководителей кружков, школьников старших классов, студентов педагогических специальностей. Книга будет интересна всем любителям красивых математических задач.

ББК 22.1

ISBN 978-5-4439-0301-9

ПРЕДИСЛОВИЕ

В основу книги, предлагаемой читателю, легла вышедшая в 2008 году в издательстве МЦНМО книга «96 нестандартных задач».

Настоящее издание, однако, радикально переработано. Прежде всего, исправлены замеченные опечатки и ошибки, которых оказалось удручающее количество (начиная с обложки, согласно которой книга называлась просто «Девяносто шесть»); исключено несколько малоудачных задач, но главное – добавлено около сорока новых задач. Таким образом, фактически читателям предлагается почти что новая книга.

В частности, в книге возник новый раздел «Неоконченные задачи». Это задачи, которые автору не удалось решить полностью, и известна только часть решения – иногда почти полное решение, иногда только полезные соображения к решению.

Читателю рекомендуется сначала самостоятельно подумать над этими задачами, а потом непременно заглянуть в раздел решений и сравнить, что в этой задаче получилось, что – нет.

Почти все задачи придуманы автором книги. Впрочем, в отношении задач «авторское право» не действует, в частности, и потому, что порой задачу, составленную одним, корректирует (а иной раз корежит) другой, решение находит третий... Вот и в этом сборнике есть несколько задач, насчет авторства которых нет полной ясности, или которые придумал автор, а решил кто-то другой, а иногда – наоборот. В принципе такие задачи автор вставлять избегал, но несколько задач, в которых авторство «сомнительно», все-таки вставил – очень уж они понравились автору, и надеюсь, понравятся и читателям.

Кроме того, в книге помещено дополнение: статья «Что такое математика, или Математика для нематематиков».

Хочу выразить благодарность сотрудникам журнала «Квант» за многолетнее сотрудничество, которое, между прочим, породило некоторые задачи сборника. Но особо хочу поблагодарить инициатора настоящего издания Сергея Дориченко.

А.Толпыго

Сокращения

ТГ – Турнир городов

ВМШ – вечерняя математическая школа,

СО – студенческая олимпиада,

ММО – Московская математическая олимпиада,

УРО – Украинская республиканская олимпиада.

Задачи отмечаются звездочками

* – легкая, *** – трудная,

** – средняя, **** – очень трудная или решение неизвестно.

ЗАДАЧИ

Задачи на шахматной доске

1.** На бесконечной шахматной доске расставлены белые пешки на черных полях, через три поля на четвертое, как показано на рисунке 1. Может ли конь обойти такую доску, побывав на каждом поле (кроме занятых пешками) ровно по одному разу?

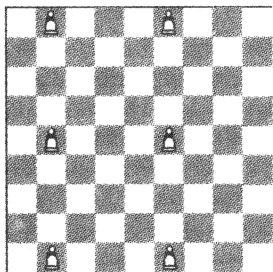


Рис. 1

2*.** Требуется расставить ладьи на доске 8×8 так, чтобы каждое поле доски оказалось под боем не менее чем двух ладей (в том числе должны быть биты и поля, на которых стоят ладьи, причем считается, что ладья не бьет то поле, на котором она стоит). Каким минимальным числом ладей можно обойтись, если при этом:

а) считается, что ладья бьет «через» ладью, перекрывающую ей дорогу к полю;

б) считается, что ладья не бьет «через» ладью? Например, на рисунке 2 поле, на котором стоит белый конь, в варианте а) бито 5 раз, а в варианте б) только 2.

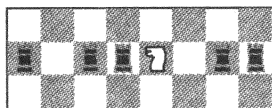


Рис. 2

3*.** а) Игра в «супершахматы» ведется на доске размером 30×30 , в ней участвуют 20 разных фигур, каждая из которых ходит по своим правилам. Известно, однако, что:

- любая фигура с любого поля бьет не более 20 полей;
- если фигуру сдвинуть на несколько полей, то битые поля соответственно сдвигаются (может быть, за пределы доски).

Докажите, что:

- 1) любая фигура бьет данное поле X не более чем с 20 полей;
- 2) можно расставить на доске все 20 фигур так, чтобы ни одна из них не била другую.

б) Игра в «супершахматы» ведется на доске размером 100×100 , в ней участвуют 20 фигур, каждая из которых ходит по своим правилам. Известно, что любая фигура с любого места

бьет не более 20 полей. Докажите, что можно расставить на доске все 20 фигур так, чтобы ни одна из них не била другую.

(VII ТГ, осень 1985)

4*. а) Можно ли на бесконечной шахматной доске расставить ферзей так, чтобы на каждой горизонтали, вертикали и диагонали (обоих направлений) стояло ровно по 1 ферзю?

б) Можно ли расставить ферзей на бесконечной доске так, чтобы на каждой горизонтали, вертикали и диагонали одного направления стояло по ферзю, а из диагоналей другого направления битой оказалась каждая вторая?

в) А каждая пятая?

(СО, 1994)

5*.** Можно ли расставить 15 ферзей на цилиндрической доске 15×15 так, чтобы они не били друг друга?

6.** Ладья обходит шахматную доску, каждый раз переходя с клетки на соседнюю (с общей стороной), и, побывав на каждой клетке один раз, возвращается на начальное место. Таким образом, ее маршрут – несамопересекающийся невыпуклый многоугольник. Найдите его площадь. (Считайте площадь клетки равной 1; маршрут проходит через центры клеток.)

7.** а) Ладья обходит шахматную доску, каждый раз переходя с клетки на соседнюю (с общей стороной), и, побывав на каждой клетке один раз, возвращается на начальное место. Известно, что она попала на поле b2 с поля a2. С какого поля она попала на поле h8?

б) Ладья обходит шахматную доску. Маршрут начинается в клетке d4 и кончается в клетке d6. Ладья каждый раз переходит с клетки на соседнюю (с общей стороной), побывав на каждой клетке не более одного раза. Известно, что ладья побывала во всех четырех углах доски и попала на поле a1 с поля a2, на поле a8 с поля a7 и на поле h8 с поля h7. С какого поля она попала на поле h1?

(XIII турнир юных математиков им. М.Ядренко, Николаев, 2010)

8*. Белая ладья стоит на поле b2, черная на поле c4. Игроки ходят по очереди, начинают белые. Ладье запрещается становиться под бой другой ладьи, а также вторично становиться на ранее пройденное поле. Тот, кто не может сделать очередной ход, проигрывает. Кто должен выиграть, если оба игрока играют наилучшим образом?

(XXXIII ТГ, весна 2012)

9*. Чернопольный слон обходит черные клетки шахматной доски, переходя каждый раз с клетки на соседнюю и не возвращаясь на уже пройденные клетки. Какое наибольшее число клеток он может обойти?

Геометрия

10*. Постройте 10-угольник $A_1A_2 \dots A_{10}$, зная все его углы и сторону A_1A_2 , если еще известно, что в этот 10-угольник можно вписать окружность.

(ВМШ, 1964;

Сборник «Математические задачи», 1965)

11*. Дана окружность с центром O и вектор \vec{v} . Найдите на окружности две такие точки A и B , чтобы угол между векторами $\vec{v} + \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} + \overrightarrow{OB}$ был максимален.

(XVIII УРО, 1978)

12*. Можно ли разрезать квадратный пирог на 9 равновеликих частей таким образом: выбрать внутри квадрата две точки и соединить каждую из них прямыми линиями разрезами со всеми четырьмя вершинами квадрата (рис.3)? Если можно, то какие две точки следует выбрать?

(XXX ММО, 1967)

13.** В бесконечно большой каравай, занимающий все пространство, в точках с целыми координатами впечены изюминки диаметра 0,1. Каравай разрезали на части несколькими плоскостями. Докажите, что найдется неразрезанная изюминка.

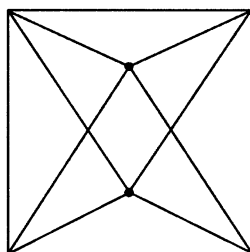


Рис 3

(XXX ММО, 1967)

14.** Некий жулик приобрел квадратный участок земли, обнес его забором и получил у доверчивого председателя колхоза документ, в котором сказано, что он имеет право несколько раз произвести следующую операцию: провести прямую через любые две точки забора, огораживающего его участок, снести кусок забора между двумя точками и достроить такой же участок забора с другой стороны симметрично снесенной части относительно выбранной прямой. Сможет ли он такими операциями увеличить площадь своего участка?

(XXXII ММО, 1969)

15.** В куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ вписаны два тетраэдра $ACB_1 D_1$ и $BDA_1 C_1$. Найдите объем их пересечения, если объем куба равен 1.

16. а)** Ребро деревянного куба равно 1. От одной из вершин куба на каждом выходящем из нее ребре отложен отрезок длины a . Плоскость, проходящая через 3 полученные точки, отсекает от куба треугольную пирамиду. Проведем 8 таких плоскостей (возможно, полученные пирамиды будут пересекаться); известно, что часть куба, не принадлежащая ни одной из пирамид, имеет объем $1/2$. Найдите a .

б*)** Та же задача в n -мерном пространстве.

17.** Учитель продиктовал классу задание, которое каждый ученик выполнил в своей тетради. Вот это задание (рис.4): «Нарисуйте две concentric окружности радиусов 1 и 10. К

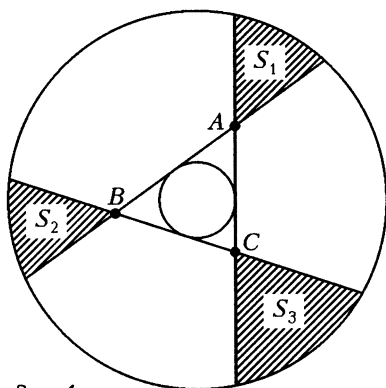


Рис. 4

малой окружности проведите три касательных так, чтобы точки их пересечения A , B и C лежали внутри большой окружности. Измерьте площадь S треугольника ABC и площади S_1 , S_2 и S_3 трех образовавшихся «секторов» с вершинами в точках A , B и C . Найдите $S_1 + S_2 + S_3 - S$. Докажите, что у всех учеников, которые правильно выполнили задание, получилось одно и то же число.

(VII ТГ, осень 1985)

18.** Дан полуправильный¹ восьмиугольник $ABCDEFGH$. В нем проведены 8 диагоналей через две вершины на третью: AD , BE и т.д. В центре образовался новый полуправильный восьмиугольник $A_1 B_1 \dots H_1$, с которым та же операция проделана

¹ Полуправильным называется такой восьмиугольник, у которого все углы равны $3\pi/4$, а стороны равны через одну: $AB = CD = EF = GH$ и $BC = DE = FG = HA$, но $AB \neq BC$. Другое, равносильное (для восьмиугольника) определение: полуправильный восьмиугольник есть пересечение двух *неравных* квадратов с общим центром, из которых один повернут относительно другого на $\pi/4$. (При этом, разумеется, предполагается, что ни один из квадратов не лежит целиком внутри другого.)

еще раз, и т.д. Докажите, что этот процесс не может продолжаться бесконечно.

(XIII ТГ, осень 1991)

19*.** В пространстве заданы 48 точек с координатами $(\pm 1, \pm 2, \pm 3)$, где порядок цифр 1, 2, 3 и выбор знаков осуществляется всеми мыслимыми способами. Сколько граней имеет выпуклый многогранник с этими вершинами? Какова форма этих граней?

(Матбой Москва–Ленинград, 1982,
XVI Всесоюзная олимпиада)

20*. На плоскости задана бесконечная сетка из правильных шестиугольников площади 1. На эту сетку наложен квадрат со стороной 1000. Сколько вершин шестиугольной сетки попало внутрь квадрата? Найдите ответ с ошибкой не более 5%.

21*. Даны две выпуклые фигуры, каждая площадью 1. Требуется построить выпуклую фигуру площади S , в которую можно поместить обе фигуры. Каково должно быть S , чтобы задача всегда имела решение?

22*. Постройте треугольник по вершине A и двум прямым, на которых лежат биссектрисы, проведенные из вершин B, C .

23**.** Даны 80 векторов $\overline{A_1B_1}, \overline{A_2B_2}, \dots, \overline{A_{80}B_{80}}$, длина каждого из них больше 1. Докажите, что из них можно выбрать 7 таким образом, что все расстояния A_iB_j ($i \neq j$) больше 0,3.

(Лемма из книги «Геометрия близости»²)

24. Куб с ребром 1 лежит по одну сторону от плоскости.

1) Докажите, что 8 чисел – расстояния от вершин куба до плоскости – можно так разбить на две четверки $\{a, b, c, d\}$ и $\{e, f, g, h\}$, что:

$$a^*) \quad a + b + c + d = e + f + g + h,$$

$$6^{**}) \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + g^2 + h^2.$$

2**) Найдите для того же разбиения соотношение между числами $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ и $e^3 + f^3 + g^3 + h^3$.

25*.** Петя нарисовал на плоскости два треугольника: ABC и $A'B'C'$. Он сказал Коле: «В треугольнике ABC выполняется

² Ефремович В.А., Толпыго А.К. Геометрия близости. – М.: ФИМА, 2007.

равенство: $AB = mAC + nBC$. Какой угол в нем наименьший?» «А что такое m и n ?» – спросил Коля. «Это координаты точки M на плоскости», – и Петя указал в первой четверти эту точку. «У меня недостаточно данных, чтобы решить задачу», – подумав, сказал Коля.

«Тогда реши другую задачу. В треугольнике $A'B'C'$ выполняется равенство: $A'B' = pA'C' + qB'C'$; p и q – координаты точки N », – и Петя указал другую точку в первой четверти. «Тогда наименьший угол – это...» – сказал Коля.

Что можно сказать о расположении на плоскости точек M и N , исходя из предположения, что Коля в обоих случаях решил задачу верно? Какой угол назвал Коля?

26*. Диагонали выпуклого четырехугольника имеют длины $AC = a$ и $BD = b$, $a > b$. Каким может быть максимальный периметр четырехугольника $ABCD$? А минимальный?

27.** В выпуклом семиугольнике $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ диагонали A_1A_3 , A_2A_4 , A_3A_5 , A_4A_6 , A_5A_7 , A_6A_1 и A_7A_2 равны между собой. Диагонали A_1A_4 , A_2A_5 , A_3A_6 , A_4A_7 , A_5A_1 , A_6A_2 и A_7A_3 тоже равны между собой. Обязательно ли этот семиугольник равносторонний?

(XXV ТГ, осень 2003)

28. $ABC...E$ – несамопересекающийся невыпуклый многоугольник.

а**) Докажите, что либо из вершины A , либо из вершины B можно провести диагональ, целиком лежащую внутри многоугольника.

б*) Придумайте пример, когда из вершины A нельзя провести ни одной такой диагонали.

в*) Пусть MP – тот кусок диагонали BK , который находится внутри многоугольника. Придумайте пример, когда он не пересекается ни одной диагональю многоугольника (лежащей в нем целиком или частично – все равно).

29*. На плоскости даны две точки A , B и прямая, параллельная отрезку AB . Найдите на прямой точку C такую, что $AC \cdot BC$ минимально.

(XXIX ТГ, осень 2007)

30.** Стороны четырехугольника $ABCD$ имеют длины $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 6$ и $DA = 5$. Докажите, что площадь такого четырехугольника меньше 19.

31.** Квадрат разрезан на три выпуклых многоугольника. Может ли случиться, что диаметр каждого из них не превосходит: а) единицы, б) 1,01; в) 1,1?

(XXIX ТГ, осень 2007)

32*. Из бумаги вырезан треугольник, один из углов которого равен α . Его разрезали на несколько треугольников, и выписали в ряд числа – величины всех углов всех полученных треугольников. Может ли случиться, что все эти числа меньше α :

а) в случае, если $\alpha = 70^\circ$;

б) в случае, если $\alpha = 80^\circ$.

(XXIX, весна 2008)

33.** а) В сферу вписаны куб и правильный октаэдр. Найдите отношение их объемов.

б) В сферу вписаны правильный икосаэдр и правильный додекаэдр. Найдите отношение их объемов.

34.** На столе лежит листок бумаги в клеточку. Поверх него положен еще один лист бумаги в клеточку; клетки на обоих листах квадратные и одного размера, но второй лист положен наискось, так что его линии не параллельны линиям первого. Верхний листок прозрачный, и видно, как его линии делят один из квадратов нижнего листка.

На какое максимальное число частей может быть разделен нижний квадрат?

А на какое минимальное?

(Летняя конференция ТГ, Теберда, 2010)

35.** На столе лежит листок бумаги в клеточку размером 10000×10000 . Поверх него положен еще один лист бумаги в клеточку размером 1000×2000 ; клетки на обоих листах квадратные и одного размера. Верхний листок прозрачный, и видно, как линии нижнего листка делят квадраты верхнего листка на части; таким образом, мы видим, что число частей верхнего листка больше двух миллионов.

Докажите, что это число меньше десяти миллионов.

(Летняя конференция ТГ, Теберда, 2010)

36*. На ватмане нарисован правильный 17-угольник $B_1B_2 \dots B_{17}$. Для каждой тройки его вершин B_i, B_j, B_k изготовлен бумажный треугольник, равный $B_iB_jB_k$. Его кладут поверх исходного многоугольника, совместив с соответствующим треугольником; таким образом, 17-угольник оказывается покрыт бумажными треугольниками в несколько слоев, причем разные

точки покрыты различное число раз. Назовем кратностью точки число треугольников, покрывающих ее. (При этом точки, лежащие на контуре 17-угольника или на его диагоналях, не рассматриваются.)

Укажите какую-нибудь точку, имеющую

- а) наименьшую кратность;
- б) наибольшую кратность.

37.** В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ стороны равны соответственно: $AB = 10$, $BC = 14$, $CD = 11$, $AD = 5$. Найдите угол между его диагоналями.

(XXXIII ТГ, осень 2011)

38*.** Требуется построить замкнутую 2009-звенную ломаную, а затем провести 2009 прямых, на которых лежат ее звенья. Некоторые из этих прямых могут, вообще говоря, совпадать. Какое наименьшее число прямых может получиться?

*(XXXI ТГ, весна 2010
– в немного измененной формулировке)*

39*. В треугольнике ABC известны две стороны: $AB = 1$, $AC = 4$. Что можно сказать:

- а) о длине h высоты, опущенной из вершины A ;
- б) о длине m медианы, опущенной из вершины A ;
- в) о длине b биссектрисы, опущенной из вершины A ?

Во всех трех случаях требуется указать числовые интервалы, в которых может (не может) лежать соответствующее число.

40 (Неплотные упаковки).** а) На плоскости расположено 12 кругов радиуса 1. Известно, что расстояние между центрами любых двух кругов не меньше 10. Докажите, что можно провести прямую, отделяющую один круг от других. Это означает, что прямая не пересекает ни один из кругов, причем по одну сторону от нее лежит 1 круг, а по другую – все остальные.

б) На плоскости расположено 120 кругов радиуса 1. Известно, что расстояние между центрами любых двух кругов не меньше 10. Можно ли утверждать, что существует прямая, отделяющая ровно один из этих кругов от остальных?

Теория чисел

41.** Существуют ли два таких последовательных натуральных числа, что сумма цифр каждого из них делится на 49? Если да, то найдите наименьшую пару таких чисел.

(XXX ММО, 1967)

42*. Делится ли число $A = 1010101 \dots 01$ (n единиц) на число $B = 11 \dots 1$ (n единиц)?

43*. Даны числа 4, 14, 24, ..., 104. Докажите, что из них нельзя вычеркнуть сначала одно, потом два, потом три, наконец, четыре числа так, чтобы после каждого вычеркивания сумма оставшихся чисел делилась на 11.

(XXXI ММО, 1968)

44*. Остап Бендер организовал в городе Фуксе раздачу слонов населению. На раздачу явилось 28 членов профсоюза и 37 не членов, причем Остап раздавал слонов поровну всем членам профсоюза и поровну не членам. Оказалось, что существует лишь один способ такой раздачи (так, чтобы раздать всех слонов). Какое наибольшее число слонов могло быть у О.Бендера?

(XXX ММО, 1967)

45. Пусть p – простое число, $p > 5$. Запишем число $1/p$ в виде бесконечной десятичной дроби.

а*) Докажите, что сумма всех цифр периода дроби делится на 9.

б**) Пусть длина периода равна km ; разобьем его на k кусков («граней») по m цифр в каждом. Докажите, что сумма этих граней делится на $99 \dots 9$ (m девяток).

(Например, $\frac{1}{7} = 0, (142857)$; $14 + 28 + 57 = 99$; $142 + 857 = 999$. Или: $\frac{1}{13} = 0, (076923)$; $76 + 923 = 999$.)

(XVIII УРО, 1978)

46*. Известно, что $\{32x\} = \{200x\}$; $\{2x\} = \{100x\}$.³ Докажите, что $\{x\} = \{155x\}$.

(XXXV УРО, 1995)

47.** а) Докажите, что существует такое число q , что в десятичной записи числа $q \cdot 2^{1000}$ нет ни одного нуля.

(XXX ММО, 1967)

б) Число N не оканчивается нулем. Докажите, что существует такое число q , что в десятичной записи qN нет ни одного нуля.

48.** Выписаны числа: 1, 2, 4, ..., 2^n , ..., 2^{1000} . Затем выписа-

³ Фигурные скобки означают дробную часть числа x , т.е. разность между x и наибольшим целым, не превосходящим x .

ны все первые цифры этих чисел. Сколько единиц среди всех выписанных цифр?

(CO, 1995)

49.** Набор чисел $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ назовем *редким*, если все разности $x_i - x_j$ различны.

а) Дан редкий набор из 17 целых чисел: $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{16}$. Докажите, что $x_{16} > 145$.

б) Набор из семи чисел $0 = x_0 < \dots < x_6$ – редкий. Какое наименьшее значение может принимать x_6 ?

в) Для каждого n дан редкий набор $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Известно, кроме того, что существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n^2} = A$. Докажите, что $A \geq 1$.

г) Докажите, что существует такое число B , что для любого n найдется редкий набор $x_1 < \dots < x_n$ такой, что $x_n < Bn^3$.

50*.** По произвольной тройке чисел $a_0 \geq b_0 \geq c_0$ образуется новая тройка, состоящая из чисел $a_0 - b_0$, $a_0 - c_0$, $b_0 - c_0$. Упорядочив ее по убыванию, мы получаем новую тройку a_1, b_1, c_1 , с которой делается то же самое, и т.д. Известно, что $a_0 = 1$, $c_0 = 0$. Докажите, что $a_{10} > \frac{1}{100}$. При каком b_0 оно будет наименьшим?

(XXIII УРО, 1983)

51*. Существует ли такое число C , что сумма всех делителей числа n меньше nC при любом n ?

52*. Известно, что каждое из r различных чисел a_1, a_2, \dots, a_r равно произведению двух других, не равных ему чисел этого набора. Какое наименьшее значение может принимать r , если в качестве a_1, a_2, \dots, a_r берутся:

- а) положительные числа;
- б) действительные числа;
- в) комплексные числа;
- г) кватернионы?

53*. а) Рассматриваются все 10-значные числа, которые записываются семью двойками и тремя единицами. Найдите их среднее арифметическое.

б) То же самое для 10-значных чисел, которые записываются семью нулями и тремя единицами.

54.** Пусть a – произвольное четырехзначное число, и пусть x, y, z – последние три цифры числа a^7 . Тогда трехзначное

число \overline{xuz} (оно может начинаться с одного или нескольких нулей) назовем *хорошим*. Докажите, что от 000 до 999 существует ровно 505 хороших трехзначных чисел.

55.** 1991-й и 2002-й годы одинаково читаются слева направо и справа налево. Интервал между ними составляет 11 лет. Каким может быть максимальный и минимальный интервал между двумя соседними годами с аналогичным свойством:

- а) в ближайшую тысячу лет;
- б) в ближайшие 10 000 лет?

56. а*) Дано число z . Известно, что числа z^{13} и z^{17} – целые. Докажите, что z – тоже целое.

б)** Докажите, что существует такое число $x > 0$, что его дробная часть $\{x\}$, а также дробные части его квадрата и куба удовлетворяют неравенствам: $0,1 < \{x\} < 0,9$; $\{x^2\} < 0,000001$; $\{x^3\} < 0,000001$.

в*)** Докажите, что если все эти условия из пункта б) выполнены, то $x > 5$.

г)** Даны числа α , β , γ , все три – между нулем и единицей ($0 < \alpha$, β , $\gamma < 1$).

Докажите, что существует число z такое, что одновременно приближенно выполняются три равенства: $\{z\} \approx \alpha$, $\{z^2\} \approx \beta$, $\{z^3\} \approx \gamma$, причем все три выполняются с точностью до 0,000001.

57*. Пусть $a^{\wedge}b$ обозначает число a^b . В выражении $7^{\wedge}7^{\wedge}7^{\wedge}7^{\wedge}7^{\wedge}7^{\wedge}7$ надо расставить скобки, чтобы определить порядок действий (всего будет пять пар скобок). Можно ли расставить эти скобки двумя разными способами так, чтобы получилось одно и то же число?

(XXX ТГ, весна 2009)

58.** Число n может быть двумя разными способами представлено в виде суммы двух кубов натуральных чисел: $n = a^3 + b^3 = c^3 + d^3$.

Может ли быть, что n является произведением:

- а) трех простых чисел;
- б) двух простых чисел?

59*.** Пусть A – сумма восьмых степеней всех чисел от 1 до 999 999 999, и пусть B – сумма восьмых степеней всех тех чисел от 1 до 999 999 999, у которых сумма цифр четна.

Докажите, что $A = 2B$.

60. а) Записано действительное число $0, \dots, n$ -я цифра которого есть r -я цифра числа 2^n . Подразумевается, что натуральное число r задано раз навсегда, тогда как n пробегает весь натуральный ряд: $n = 1, 2, 3, \dots$

а*) Докажите, что если r -я цифра отсчитывается с конца числа, то полученное число рационально.

б**) Докажите, что если r -я цифра отсчитывается с начала числа, то полученное число иррационально.

(Пример. Если $r = 2$, то получится число $0,0001362512\dots$, если отсчитывать с конца, и число $0,0006242510\dots$, если отсчитывать с начала).

Алгебра

61*. Разложите на множители выражение

$$Q = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 28b^3.$$

(XXIII УРО, 1983)

62.** На доске выписали в ряд 105 единиц. У каждой третьей из них изменили знак, затем у каждого пятого из полученных чисел также изменили знак, после этого знак сменили у каждого седьмого числа. Найдите сумму всех полученных чисел.

(XXIII УРО, 1983)

63.** Пусть a_r — число полных квадратов, содержащихся в r -й тысяче, т.е. в промежутке $[1000(r-1), 1000r)$. Докажите, что последовательность $\{a_r\}$ не является периодичной, даже если отбросить у нее любое число начальных членов.

64.** а) Дано шестизначное число, его первая цифра 5. Верно ли, что к нему можно приписать справа еще 6 цифр так, чтобы в результате получился полный квадрат?

б) Тот же вопрос, если первая цифра числа равна 1.

в) Тот же вопрос, если первая цифра числа равна 2.

г) Найдите наименьшее шестизначное число, для которого нельзя приписать справа еще 6 цифр так, чтобы получить полный квадрат.

д) Дано шестизначное число, его первая цифра равна 3. Какое наименьшее число цифр требуется, чтобы можно было аналогичным способом получить из него куб (вне зависимости от того, каково исходное число)?

65.** Натуральный ряд представлен в виде объединения некоторого числа попарно не пересекающихся бесконечных целочисленных арифметических прогрессий с положительными разностями d_1, d_2, \dots . Может ли случиться, что при этом сумма $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \dots$ не превышает 0,9? Рассмотрите два случая:

- а) общее число прогрессий конечно;
- б) прогрессий бесконечное число.

(XI ТГ, осень 1989)

66*. Не пользуясь таблицами или калькулятором, докажите неравенство: $1,5 < \log_2 3 < 1,6$.

(XXII УРО, 1982)

67.** Не пользуясь калькулятором, найдите число $\lg 7$ с ошибкой не более 0,01.

(XXII ТГ, осень 1995)

68.** Известно, что $\{a_1, a_2, \dots, a_{50}\} = \{1, 2, \dots, 50\}$. Найдите максимальное возможное значение суммы

$$\sqrt{|a_1 - 1|} + \sqrt{|a_2 - 2|} + \dots + \sqrt{|a_{50} - 50|}.$$

(Отбор на международную олимпиаду, 1993)

69*. Каким соотношениям должны удовлетворять коэффициенты уравнения $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, чтобы после некоторых тождественных преобразований и последующей замены переменной $y = x + \frac{k}{x}$ оно сводилось к квадратному уравнению?

(XXIII УРО, 1983)

70*. Всякий ли многочлен 4-й степени

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

можно представить в виде $P(x) = Q(R(x))$, где $Q(x)$ и $R(x)$ – квадратные трехчлены?

(XXVI УРО, 1986)

71.** Проведите прямую, касающуюся графика функции

$$y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

сразу в двух точках. При каких a, b, c, d это возможно?

(СО, 1994)

72*.** Дана система:

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \dots + \frac{1}{n}x_n &= \frac{0!}{n!}; \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + \dots + \frac{1}{n+1}x_n &= \frac{1!}{(n+1)!}; \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{5}x_3 + \dots + \frac{1}{n+2}x_n &= \frac{2!}{(n+2)!}; \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{1}{n}x_1 + \frac{1}{n+1}x_2 + \dots + \frac{1}{2n-1}x_n &= \frac{(n-1)!}{(2n-1)!}. \end{aligned} \right.$$

а) Решите систему.

б) Пусть $n = 10$. Докажите, что $x_1 = -x_{10}$, $x_2 = -x_9$ и т.д.

в) Пусть $n = 9$. Докажите, что $x_1 = x_9$, $x_2 = x_8$ и т.д.

73*.** Матрица составлена из величин

$$a_{ij} = \frac{1}{b_i - c_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

а) Найдите матрицу, обратную к такой матрице.

б) Вычислите определитель матрицы.

74.** Матрица составлена из величин $a_{ij} = (i + j - 1)^k$, где $i, j = 1, \dots, n$, а k принимает одно из значений $0, 1, \dots, n - 1$. Вычислите определитель этой матрицы.

75*. Пусть a_n – наибольшее значение функции $\sin x - x^n$ на промежутке $(0; \infty)$. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

76.** Пусть z пробегает множество всех комплексных корней n -й степени из 1. Докажите, что

$$\sum \frac{z}{x-z} = \frac{n}{x^n - 1}.$$

77*. а) У меня на счету лежит 500 долларов. Банк разрешает либо снять со счета 300 долларов, либо положить на счет 198 долларов (и никаких других операций). Какую наибольшую сумму я могу снять со счета в результате нескольких таких операций, если вначале у меня в кармане ни гроша, а процентов банк не платит?

6) Имеется доска размером 1×147 . На одном из полей стоит шашка. За один ход разрешается либо сдвинуть шашку влево на 100 полей, либо вправо на 47 полей. Докажите, что если будет сделано 147 ходов, то шашка неизбежно вернется 147-м ходом на исходное поле.

(XX ТГ, весна 1999)

78*. Дана последовательность a_1, a_2, \dots, a_{2n} , в которой все числа равны $+1$ или -1 . Докажите, что существует такое k , $0 \leq k \leq 2n$, что

$$a_1 + \dots + a_k - a_{k+1} - \dots - a_{2n} = 0.$$

79**. Участники шахматного турнира сыграли друг с другом по одной партии. Затем для каждого участника подсчитали число A , равное сумме очков всех участников, у которых он выиграл, минус сумма очков участников, которым он проиграл. Может ли случиться так, что для всех участников число A окажется: а) положительным; б) отрицательным?

(XXII ТГ, весна 2001)

80****. Докажите формулы:

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} = 3 \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2 C_{2n}^n}; \quad \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{5}{2} \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^3 C_{2n}^n}.$$

(Летняя школа ТГ, 1998)

81*. Найдите все арифметические прогрессии, обладающие следующими свойствами: а) разность $d > 0$; б) сумма прогрессии равна 1; в) каждый член прогрессии имеет вид $1/k$, где k натуральное.

(XXVIII ТГ, осень 2007)

82**. Имеется клетчатая бумага; площадь клетки равна 1. Если на ней отметить два узла, то вертикали и горизонтали, на которых они лежат, образуют прямоугольник. (Если они лежат на одной горизонтали или вертикали, то получается вырожденный прямоугольник площади 0.)

Внутри квадрата 30×30 (не на границе) отмечено 29 узлов.

а) Докажите, что можно выбрать два из них так, что площадь соответствующего прямоугольника меньше 13.

б) Верно ли, что независимо от того, как отмечены узлы, можно выбрать два узла так, что площадь прямоугольника меньше 10?

83.** Последовательность функций определена следующим образом:

$$f_0(x) = \sqrt{x}, \quad f_1(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x+1},$$

$$f_2(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x+1} - \sqrt{x+2} + \sqrt{x+3}, \dots$$

$$\dots, \quad f_{n+1}(x) = f_n(x) - f_n(x + 2^n).$$

Докажите, что $f_{2010}(x)$ всюду возрастает.

84.** Найдите при произвольном данном n все решения системы

$$x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0,$$

$$x_1^2 + x_2 = x_2^2 + x_3 = x_3^2 + x_4 = \dots = x_{n-1}^2 + x_n = x_n^2 + x_1 = 0,9.$$

85*. По окружности расставлено 999 единиц. Затем к некоторым из них разрешается поставить минусы. Места минусов произвольны; их число тоже произвольно, но после их расстановки должно получиться не менее 100 минусов и не менее 100 плюсов.

Затем вычислены произведения всех чисел по 10 подряд (т.е. произведения вида $x_k x_{k+1} x_{k+2} \dots x_{k+9}$), а затем взята сумма S всех 999 получившихся чисел.

- а) Какое наибольшее значение может принимать S ?
- б) А какое наименьшее?

(XXXI ТГ, весна 2010)

86.** В Стране Дураков проживает 13 олигархов. Несколько лет назад в ней начали проводить кампании по борьбе с коррупцией. Суть кампании в следующем: у самого богатого из олигархов (предполагается, что равных состояний нет, т.е. что любые два состояния различаются хоть на 1 монету) конфискуется все золото, какое у него есть, а каждому из остальных выдается из государственной казны по миллиону золотых монет.

На следующий год кампания повторяется: у самого богатого все отбирают, а остальным (в том числе и тому, кого экспроприировали в прошлом году) выдают по миллиону. Так повторяется несколько раз.

Предполагается, что в промежутке между кампаниями олигархи не богатеют и не беднеют.

Известно, что в начальный момент у всех олигархов в сумме был 31 миллион золотых монет.

Какое наибольшее количество денег могло при этих условиях оказаться у олигархов после какой-нибудь очередной кампании? Ответ требуется найти с точностью до 1000 монет.

87*.** Сто положительных чисел x_1, x_2, \dots, x_{100} удовлетворяют неравенствам

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{100}^2 > 10000, \quad (*)$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{100} < 300. \quad (**)$$

Докажите, что среди них найдутся три числа, сумма которых больше 100.

(XVII ММО)

Взвешивания

88.** Туристы взяли в экспедицию 80 банок консервов, веса которых все известны и различны (имеется список). Через некоторое время надписи на консервах стали нечитаемыми, и только завхоз знает, где что. Он может это всем доказать (т. е. обосновать, что в какой банке находится), не вскрывая консервов и пользуясь только сохранившимся списком и двухчашечными весами со стрелкой, показывающей разницу весов. Докажите, что для этой цели ему

- а) достаточно четырех взвешиваний;
- б) недостаточно трех.

(XVI ТГ, весна 1995)

89.** Даны 13 монет, из них одна фальшивая, она отличается по весу от остальных (неизвестно, фальшивая монета легче или тяжелее). Определите фальшивую монету тремя взвешиваниями на чашечных весах, если разрешено, чтобы весы были неравноплечими. Каким должно быть соотношение плечей, чтобы задача решалась?

Замечание. При равноплечих весах эта задача, как известно, решения не имеет.

90*.** а) Имеется пять гирь разного веса. За одно взвешивание на весах с двумя чашками можно сравнить любые две гири и узнать, какая тяжелее. Сколько нужно взвешиваний, чтобы расположить их в порядке весов?

- б) Та же задача для n гирь.

91*. У барона Мюнхгаузена имеется 50 гирь. Известно, что веса этих гирь – целые числа $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{50} \leq 100$, и что суммарный вес гирь – четное число.

При этом барон утверждает, что ему удалось подобрать веса так, что эти гири невозможно разложить на две чашки весов так, чтобы весы были в равновесии. Не врет ли барон?

(Пояснение: гири на чашки можно класть и не поровну: скажем, можно на одну чашку положить 27 гирь, а на другую 23; однако положить требуется непременно все 50 гирь.)

(XXXII Турнир городов, весна 2011)

Игры

92*. Кошка и мышка бегают с постоянными скоростями $V_{\text{кошки}} = 10$ и $v_{\text{мышки}} = 1$ по лабиринту в форме прямоугольника с проведенными диагоналями (рис.5). Стороны прямоугольника равны 3 и 4. Диагональные ходы слишком узки для кошки. И кошке, и мышке запрещено останавливаться, менять свои скорости, а также поворачивать посреди хода, не добежав до одной из вершин или центра прямоугольника. (Поворачивать на 180° в вершине разрешается.) В начальный момент кошка находится в одной вершине прямоугольника, мышка в другой. Может ли кошка поймать мышку?

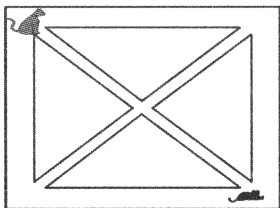


Рис. 5

93.** Двое играют в следующую игру. Имеется две кучки конфет, играющие делают ход по очереди. Ход состоит в том, что играющий съедает одну из кучек, а другую делит на две (равные или неравные) части. Если он не может разделить кучку, так как в ней всего одна конфета, то он ее съедает и выигрывает. В начале игры в кучках было 33 и 35 конфет. Кто выигрывает, начинающий или его партнер, и как для этого надо играть?

(XXXI ММО, 1968)

94.** Два мудреца играют в следующую игру. Выписаны числа 0, 1, 2, ..., 1024. Первый мудрец вычеркивает 512 чисел по своему выбору; затем второй вычеркивает 256 чисел из оставшихся, потом первый 128 чисел из оставшихся и т.д. На десятом шаге второй мудрец вычеркивает одно число; остаются два числа. После этого первый мудрец платит второму сумму, равную разности этих чисел. Как выгодней играть первому мудрецу? Как второму? Сколько уплатит первый мудрец второму, если оба будут действовать наилучшим образом?

(XXXII ММО, 1969)

95*. Имеется 4 яблока. Они весят 600 г, 400 г, 300 г, 250 г. Двое – Петя и Вася – собираются их съесть. Право выбора за

Петей; он берет любое из яблок и начинает его есть. Сразу же за ним Вася берет любое из оставшихся и тоже начинает есть. Скорость поедания у обоих одинаковая. Тот, кто съел свое яблоко, имеет право взять следующее (любое из оставшихся). Какова оптимальная стратегия обоих мальчиков, если каждый хочет съесть побольше?

96*. На бесконечной плоскости в точке A лежит мяч. Двое – F и S – по очереди бьют по мячу. Длина броска первого не более 2004, длина броска второго не более 2003. Кроме того, запрещается менять направление мяча более чем на 90 градусов: иными словами, если один из игроков делает ход из B в C , а следующий ход делается из C в D , то угол BCD должен быть тупым или прямым. F хочет загнать мяч в первый квадрант (на плоскости – обычная прямоугольная система координат). Сможет ли он этого добиться при условии, что бьет первым?

97.** Играют двое. У первого игрока есть тысяча четных карточек (2, 4, ..., 2000), у второго – 1001 нечетных (1, 3, ..., 2001). Ходят по очереди, начинает первый. Ход состоит в следующем: игрок, чья очередь ходить, выкладывает одну из своих карточек, а другой, посмотрев на нее, выкладывает одну из своих карточек; тот, у кого число на карточке больше, записывает себе одно очко, а обе выложенные карточки выбрасываются. Всего получается 1000 ходов (и одна карточка второго не используется). Какое наибольшее число очков может гарантировать себе каждый из игроков (как бы ни играл его соперник)?

(XXV ТГ, 2003)

98.** Играют двое: X и Y . По кругу расставлены единицы и минус единицы, всего их 60. Вначале единицы и минус единицы чередуются.

X выбирает любой участок ряда любой длины и меняет знаки у всех чисел участка. После этого Y меняет знак у одного (любого) числа. Затем ходит X , и так далее. После того, как каждый сделал по 100 ходов, игра заканчивается, и подсчитывается сумма всех чисел. Это – выигрыш X (если сумма отрицательна – то его проигрыш).

Каким будет выигрыш X в предположении, что оба играют наилучшим образом?

Комбинаторика; разное

99.** Номера телефонов в городе N состоят из шести цифр. Можно ли установить в этом городе 100 000 телефонов так, чтобы при вычеркивании из всех этих номеров k -й цифры ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) получалось 100 000 разных номеров?

(XXXI ММО, 1968)

100.** Семь школьников решили за день обойти семь кинотеатров. При этом они поступают так: на каждый сеанс шестеро идут в один кинотеатр, а кто-то седьмой (не обязательно один и тот же) – в другой. Во всех кинотеатрах за день проводится 11 сеансов, которые начинаются в 9:00, 10:00, ..., 19:00. К вечеру каждый школьник побывал во всех семи кинотеатрах. Докажите, что в каждом кинотеатре был сеанс, на котором не был ни один из школьников.

(XXX ММО, 1967)

101*. Дробь

$$\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} = \frac{3-1}{3!} = \frac{2}{6}$$

сократима на 2; дробь

$$\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = \frac{12-4}{4!} = \frac{9}{24}$$

сократима на 3; дробь

$$\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} = \frac{60-20+5-1}{120} = \frac{44}{120}$$

сократима на 4. Докажите, что аналогичная дробь

$$\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{1996!}$$

сократима на 1995.

102*. Пусть N – число перестановок из n элементов, в которых ни один элемент не стоит на своем месте, а M – число перестановок, в которых ровно один элемент стоит на своем месте. Докажите, что $|N - M| = 1$.

103.** В автобусной ленте миллион билетов с номерами от 000 000 до 999 999. Фиолетовым цветом закрашены билеты, у которых сумма четных цифр (2-й, 4-й и 6-й) равна сумме

нечетных. Каково наибольшее расстояние между двумя соседними фиолетовыми билетами?

(XXXI ММО, 1968)

104*.** Квадратную таблицу $n \times n$ требуется так заполнить числами, равными 1, -1 или 0, чтобы все суммы чисел по строкам и по столбцам таблицы были различны. Для каких n это возможно?

(XXI УРО, 1981)

105.** По кругу лежат 10 монет. Разрешается одновременно перевернуть или четыре рядом лежащие, или по две слева и справа от какой-то монеты. Можно ли этими операциями перевернуть все 10 монет?

(XV ТГ, весна 1994)

106*. Трое играют в пинг-понг на вылет. Известно, что в первой партии A выиграл у B , а в последней C выиграл у A . Известно, кроме того, что A сыграл 24 партии, B – 28 партий и C – 38. Сколько партий выиграл игрок B ?

107*. Решите уравнение: $\operatorname{tg} 3x = 11 \operatorname{tg} x$.

108**.** Оцените сверху сумму

$$S = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin 100x.$$

Какую наилучшую оценку вы можете получить? Может ли, например, эта сумма быть больше 65? 70?

(Матбой 145 школа – ФМШ – КГУ, Киев, 1985)

109.** Дана четверка целых чисел a, b, c, d . По ней строится новая четверка

$$a_1 = a - b, \quad b_1 = b - c, \quad c_1 = c - d, \quad d_1 = d - a.$$

По четверке a_1, \dots, d_1 тем же способом строится четверка a_2, \dots, d_2 , и т.д. Известно, что любое из чисел a_{100}, \dots, d_{100} не превосходит миллиарда. Докажите, что $a = b = c = d$.

110.** Пусть a, b, c, d, e – натуральные числа. Известно, что $a > b$. Рассматривается новая пятерка чисел:

$$a_1 = a - b + c - d + e, \quad b_1 = b - c + d - e + a, \quad c_1 = c - d + e - a + b,$$

$$d_1 = d - e + a - b + c \text{ и } e_1 = e - a + b - c + d.$$

По ней строится таким же способом следующая пятерка:

$$a_2 = a_1 - b_1 + c_1 - d_1 + e_1 \text{ и т.д.};$$

по пятерке a_2, \dots, e_2 — следующая пятерка a_3, \dots, e_3 , и т.д. до чисел a_{100}, \dots, e_{100} .

Докажите, что одно из чисел a_{100}, \dots, e_{100} больше 10^9 .

111.** Рассматриваются всевозможные наборы из 100 неотрицательных целых чисел, расположенных в неубывающем порядке и не превосходящих 100, в которых сумма всех чисел делится на 10. Докажите, что ровно половина этих наборов заканчивается числом 100.

(Из листка «Материалы для членов методической комиссии по математике», задачи для Всесоюзной олимпиады, 1979)

112. а*) В турнире в один круг (каждый играет с каждым по разу) участвовало r команд. Известно, что для каждой двух команд есть третья, которая выиграла у обеих. Докажите, что r не меньше 7.

б)** А если для каждой трех команд есть четвертая, которая выиграла у всех трех? При каких r это возможно (укажите, по возможности, меньшее число)?

в**)** Дано натуральное число s . Требуется, чтобы для любых s команд была команда, выигравшая у всех s . Можно ли в этом случае составить таблицу турнира (для достаточно большого r)?

113.** Уравнение $n(n+1) = 2m(m+1)$ имеет в целых числах решения $(3, 2)$ и $(20, 14)$. Имеет ли оно другие решения?

114. Обозначим через $s(x)$ сумму цифр натурального числа x . Пусть дано фиксированное число k . Обозначим через $Y(k)$ наибольшее решение неравенства $s^k(x) > x$.

а*) Найдите $Y(2)$ и $Y(3)$.

б*)** Верно ли, что число $Y(k)$ при любом k имеет вид $a99\dots 9$, где цифра a и число девяток зависят от k ?

115.** Докажите, что среднее число делителей натурального числа n , $1 < n < 1\,000\,000$, больше 10.

116*. Можно ли уместить два точных куба между соседними точными квадратами? Иными словами, имеет ли решение в целых числах неравенство:

$$n^2 < a^3 < b^3 < (n+1)^2?$$

(XXVII ТГ, 2005)

117.** Докажите, что многочлен $f(x) = x^2 - 8x + 15$ обладает следующим свойством: для любого n многочлен $f(f(\dots(f(x))\dots))$ (n раз) имеет ровно 2^n различных вещественных корней.

118. Положительные числа x_1, \dots, x_k удовлетворяют неравенствам

$$x_1^2 + \dots + x_k^2 < \frac{x_1 + \dots + x_k}{2},$$
$$x_1 + \dots + x_k < \frac{x_1^3 + \dots + x_k^3}{2}.$$

а**) Докажите, что $k > 50$.

б**) Постройте пример таких чисел для какого-нибудь k .

в***) Найдите минимальное k , для которого такой пример возможен.

(XXVIII ТГ, 2006)

119.** «Вот странно, – сказал Петя, рассматривая таблицу командного турнира по шахматам, – все три участника команды A заняли первые места на своих досках, но турнир выиграла команда B ».

«Такого быть не может», – авторитетно заявил Вася.

Кто из них прав?

Правила турнира. Командное соревнование проходило на двух досках, в команде два основных игрока и один запасной. Запасной время от времени подменял то одного, то другого основного игрока на его доске. Место на доске (первой, второй, третьей) определялось по проценту набранных очков: среди первых досок, среди вторых досок, среди запасных. Система зачета обычная: в каждой партии выигравший получал 1 очко, проигравший 0, за ничью оба игрока получают пол-очка.

120*. Сколько существует разных способов разбить число 2004 на целые положительные слагаемые, которые приблизительно равны? Слагаемых может быть одно или несколько. Числа называются приблизительно равными, если их разность не больше 1. Способы, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми.

(XXVI ТГ, осень 2004)

121. а*) В двух кучах суммарно лежит $N = 1001$ камень. Из большей кучи в меньшую перекладывают столько камней, сколько в ней уже содержится. После этого опять из той кучи, которая теперь является большей, перекладывают в меньшую столько камней, сколько в ней содержится, и так делают много раз. Верно ли, что в какой-то момент в меньшей из куч будет не более 200 камней? А не более 120 камней?

б**) Пусть α , β ($\alpha < \beta$) – два иррациональных числа, сумма которых равна 1. Заменим их числами 2α и $2\beta - 1$ (их сумма по-прежнему равна 1) и упорядочим эти числа по возрастанию, т.е. обозначим через α_1 меньшее из них, а через β_1 – большее. С числами α_1 , β_1 проведем аналогичную операцию, получим числа α_2 , β_2 и т. д. Какое наименьшее число при этом можно получить? Точнее: каким должно быть число γ , чтобы можно было утверждать, что при некотором n окажется, что $\alpha_n \leq \gamma$, и для каких γ это неверно?

122. В шахматном турнире претендентов участвовало n шахматистов, которые до этого неоднократно встречались между собой в других турнирах. Турнир проводился в 4 круга, т.е. каждый встретился с каждым 4 раза.

Перед началом турнира для каждого из участников был вычислен его рейтинг, который равен проценту очков, набранных до турнира в играх с другими $(n - 1)$ претендентами (выигрыш – 1 очко, ничья – пол-очка, проигрыш – 0). После турнира был вычислен аналогичный рейтинг, уже с учетом его результатов. Могло ли случиться, что по результатам турнира у всех, без исключения, участников рейтинг понизился?

123. Двое показывают фокус.

На столе лежит 5 карт. Они известны и зрителям, и фокусникам (например, четыре дамы и валет пик).

Один из зрителей берет карты, выбирает из них три, а две остальные прячет (например кладет рубашкой вверх). Затем он выходит в соседнюю комнату и показывает свои три карты помощнику фокусника, который берет у него одну из этих трех карт (по своему выбору).

Затем зритель возвращается в первую комнату и показывает фокуснику (и другим зрителям) две карты, которые у него остались. Фокусник должен угадать, какую карту взял его помощник.

Может ли фокус удался? Иными словами, могут ли фокусник и его помощник договориться о такой тактике, чтобы фокусник сумел по двум картам всегда угадать третью?

*(XXIX ТГ, осень 2007,
тренировочный вариант)*

124. Составлена таблица из вещественных (вообще говоря, нецелых) чисел. На последнем месте в каждой строке стоит сумма всех предыдущих чисел строки, и на последнем месте каждого столбца – сумма каждого столбца. Соответственно, в

правом нижнем углу стоит сумма всех чисел последней строки, и она же – сумма чисел последнего столбца. Таким образом, таблица имеет примерно такой вид:

1,32	4,17	5,87	4,11	15,47
12,03	17,91	14,32	5,07	49,33
3,5	21	7,14	3,12	34,76
16,85	43,08	27,33	12,3	99,56

Докажите, что можно все числа в таблице (включая суммы) округлить до целых так, чтобы по-прежнему на последних местах стояли суммы соответствующих чисел. Округлять разрешается в любую сторону: например, число 12,03 можно округлить либо до 12, либо до 13.

125. Пропагандист получил задание: показать, что в его стране ситуация в течение последних n лет монотонно улучшалась, т.е. каждый следующий год был лучше предыдущего.

Он располагает таблицей $3 \times n$, в которую внесены численные показатели – значения трех параметров за каждый из этих годов. Эти величины (например, показатель инфляции, показатель роста населения и изменение ВВП) известны: соответствующие показатели получены независимыми организациями.

Для доказательства пропагандисту предоставлено право, во-первых, уточнить любую из цифр в таблице (или даже все сразу). «Уточнение» означает следующее: каждая цифра указана с несколькими десятичными знаками – он имеет право написать вслед за последним знаком еще один на свое усмотрение (например, официальный показатель равен 3,251 – пропагандисту разрешено писать, что он равен 3,2518). Во-вторых, он имеет право составить по своему усмотрению «интегральный показатель благополучия», как сумму показателей таблицы за определенный год с произвольными (т.е. по его выбору, но одинаковыми за все годы) коэффициентами (например, $3 \times a_1 - 200 \times a_2 + 12 \times a_3$). Задача пропагандиста – составить его так, чтобы «интегральный показатель» монотонно возрастал.

Верно ли, что пропагандист имеет возможность (независимо от того, каковы данные таблицы) справиться со своим заданием:

а) если $n = 4$;

б) если $n = 5$?

Задачи для самостоятельного размышления

Полное решение задач этого раздела автору неизвестно. Читателю предлагается самостоятельно поразмыслить: что именно здесь можно сделать? – а затем заглянуть в раздел «Решения», где приводятся различные соображения по поводу того, как решать эти задачи, что тут можно сделать и каким (вероятнее всего) является ответ.

126. «Ванька-встанька». Многогранник поставлен на ровную поверхность на одну из своих граней. Вообще говоря, может случиться, что он не устоит и перекатится на другую грань.

Каково наименьшее число граней, на которых многогранник устоит:

- а) в предположении, что многогранник сделан из однородного материала;
- б) если многогранник не обязательно однородный;
- в) если многогранник не обязательно выпуклый.

127. Из чисел 1, 2, 3, ... 100 составлены всевозможные суммы. Затем сосчитали, сколько раз получилась та или иная сумма. Докажите, что чаще всего получается сумма 2525.

128. Сколько повторений одних и тех же чисел есть в треугольнике Паскаля?

Общеизвестны три: (1) единица встречается бесконечное число раз, (2) на втором и предпоследнем местах встречаются все числа по разу (следовательно, все числа, встречающиеся внутри, имеют «дубли») и (3) имеет место симметрия треугольника Паскаля относительно вертикали.

Исключим эти тривиальные повторы, т.е. будем рассматривать только такие числа C_n^k , что $(*) k > 1$ и $(**) n \geq 2k$.

Какие числа (с указанными ограничениями) встречаются в треугольнике больше одного раза?

Много ли случаев, когда числа C_n^2 и C_m^3 равны?

Верно ли хотя бы такое утверждение: ни одно число, кроме 1, не встречается в треугольнике Паскаля более 100000 раз?

129. а) Нетрудно покрыть единичный квадрат кругом площади $\pi/2$. А как покрыть квадрат несколькими кругами, суммарная площадь которых меньше π ? Круги могут пересекаться и выходить за пределы квадрата.

б) Дайте точную оценку в задаче а).

Иначе говоря: требуется найти число α такое, что (1) квадрат нельзя покрыть кругами суммарной площади меньше α

и (2) для любого $\beta > \alpha$ квадрат можно покрыть кругами площади β . (Постарайтесь также выяснить, можно ли его покрыть кругами площади ровно α .)

Эта задача подразделяется на три, а именно:

61) Найдите α в предположении, что радиусы всех кругов обязаны быть одинаковыми.

62) Найдите α , если разрешается брать круги двух произвольных радиусов.

63) Найдите α , если разрешается брать круги произвольных радиусов без всяких ограничений.

(Летняя конференция Турнира городов, Теберда, 2010)

130. а*) Докажите, что для любого n в последовательности Фибоначчи¹ 0, 1, 1, 2, 3, 5, ... найдется член, делящийся на n .

б*) Существует ли последовательность Фибоначчи, ни один член которой не делится на 5; на 7; на 11?

в*)** Для каких p существует последовательность Фибоначчи, ни один член которой не делится на p ?

¹ Последовательность Фибоначчи задается условием $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$. В пункте а) $F_1 = 0$, $F_2 = 1$.

Задачи на шахматной доске

1. Ответ. Нет, не может.

Решение. Более того, конь не может обойти достаточно большой квадрат размером $r \times r$. В самом деле, в таком квадрате свободных белых полей больше, чем черных, примерно на $\frac{r^2}{16}$ (эта формула является точной, если r делится на 4, и приближенной в противном случае). Поэтому он может обойти данный квадрат только так: побродив некоторое время по нему, выйти из него (обязательно через белое поле), затем поблуждать вне его и вернуться в него опять через белое, и так не менее чем $\frac{r^2}{16}$ раз. Но для того чтобы выйти из квадрата, необходимо сначала оказаться на его «бордюре» шириной в 2 клетки. Площадь этого бордюра примерно равна $8r$, и при больших r она меньше, чем $\frac{r^2}{16}$. Что и требовалось доказать.

2. Ответ. а) Требуется не менее 12 ладей; б) не менее 16 ладей.

Решение. Расставить 16 ладей согласно условию очень легко: можно, например, занять ладьями всю первую и всю последнюю горизонтали, или же обе диагонали; есть также много других решений. Расставить 12 ладей труднее; одно из возможных решений показано на рисунке 1.

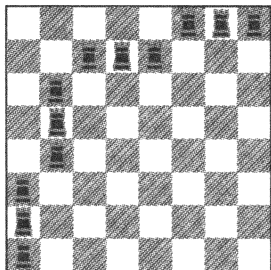


Рис. 1

Теперь нужно доказать, что в варианте а) нельзя обойтись 11 ладьями, а в варианте б) – пятнадцатью. Начнем с соображений, общих для обоих вариантов.

1. Если на одной из горизонталей нет ни одной ладьи, то каждое поле этой горизонтали должно быть бито дважды по вертикали. Таким образом, на каждой вертикали стоит минимум 2 ладьи и их число не меньше 16. Поэтому случай 1 мы

можем исключить и не рассматривать в дальнейшем. (Для краткости вместо последней фразы мы будем дальше ставить значок #.)

2. Если на каждой горизонтали не менее 2 ладей, то их число не меньше 16. #

3. Аналогичные соображения применимы и к вертикалям. Поэтому в дальнейшем мы можем рассматривать только случай, когда на каждой горизонтали и вертикали стоит не менее одной ладьи, а на некоторых – только одна. Но если ладья стоит в одиночестве на какой-то, скажем, горизонтали, то для того чтобы она была бита дважды, на ее вертикали должно стоять еще минимум 2 ладьи. Поэтому непременно есть вертикали, на которых более 2 ладей. То же справедливо и для горизонталей.

Перейдем теперь к решению пункта а).

4,а). Если хотя бы на двух горизонталях стоит более двух ладей, то общее число ладей не меньше, чем $2 \times 3 + 6 \times 1 = 12$. #

5,а). Допустим теперь, что только на одной горизонтали стоит более 2 ладей, а число ладей меньше 12. Тогда как минимум на 6 горизонталях стоит по одной ладье; все они должны стоять на вертикалях, где более 2 ладей. Но тогда либо таких вертикалей не менее двух – и мы оказываемся в ситуации, рассмотренной в 4,а), – либо все 6 стоят на одной вертикали. Поскольку на остальных 7 вертикалях также стоит хотя бы по одной ладье, их число не менее 13 (#), и все случаи рассмотрены.

Разберем теперь пункт б).

4,б). Сосчитаем все стоящие на доске ладьи, исходя из числа 16. А именно, будем исходить из того, что на каждой горизонтали стоит по 2 ладьи, а если это не так, внесем поправки. Именно, вычтем из 16 число горизонталей, на которых стоит только одна ладья (пусть L_1 – их множество, а l_1 – их число), и добавим число ладей с горизонталями, где их больше; а чтобы не путаться, рассмотрим множество M_1 тех ладей, которые стоят на горизонтали *между* двумя ладьями. Пусть их число равно m_1 . Тогда число ладей на доске равно $16 - l_1 + m_1$. Рассуждая аналогично и рассматривая вертикали вместо горизонталей, мы получим, что число ладей равно $16 - l_2 + m_2$.

5,б). Теперь задача была бы решена, если бы мы доказали, что $l_1 \leq m_1$ или что $l_2 \leq m_2$. Но сделать это трудно; к счастью, оказывается, что гораздо легче доказать те же неравенства «накрест».

В самом деле, если ладья стоит одна на горизонтали, то она непременно стоит между двумя ладьями на вертикали, т. е. принадлежит множеству M_2 . Это значит, что $L_1 \subset M_2$, откуда

$l_1 \leq m_2$. Аналогично доказывается неравенство $l_2 \leq m_1$. Из этих неравенств легко следует, что число ладей не меньше 16.

3. Решение. а) Из условия 2) следует, что любая фигура имеет какие-то определенные 20 ходов (скажем, один – на 1 поле влево и 2 поля вверх, как шахматный конь, второй – на 13 полей влево и 18 вниз, и т. д.) Отсюда следует, что она бьет данное поле только с полей, соответствующих «обратному ходу»: на 13 полей вправо и 18 вверх и т. д., а значит, также не более чем с 20 полей.

Поставим теперь на доску первую фигуру A произвольно и попытаемся поставить вторую фигуру B так, чтобы они не били друг друга. Очевидно, для фигуры B «запретны» поле, где стоит A , поля, находящиеся под боем A , и поля, с которых B бьет A , – всего не более чем 41 поле. Затем ставим третью фигуру и т. д. Очевидно, для 20-й фигуры Z запретны 19 полей, уже занятых предыдущими фигурами, и $400 + 400$ полей, битых этими фигурами или тех, с которых Z их бьет. Таким образом, фигуру Z все еще есть куда поставить.

б) Предыдущее рассуждение здесь не годится: если «битые поля» не сдвигаются вместе с фигурой, то вполне возможно, например, что то поле, на которое уже поставлена фигура A , фигура B бьет с любого поля доски. Рассмотрим иначе: рассмотрим множество всех расстановок фигур на доске (их $N(N-1)(N-2)\dots(N-19)$, где $N = 10^4$) и найдем долю позиций, в которых фигура A бьет фигуру B . Так как при любой постановке A для B запрещено 20 полей, эта доля равна $\frac{20}{9999}$. Но теперь легко сообразить, что доля позиций, где одна из 20 фигур бьет другую, во всяком случае не больше, чем $20 \cdot 19 \cdot \frac{20}{9999} < 1$, а стало быть, существуют и другие позиции.

4. Решение. а) Можно. Поставим первого ферзя произвольно, затем расставим 8 следующих ферзей так, чтобы они били 2 соседние с этим ферзем горизонтали, 2 вертикали и по 2 диагонали каждого типа, и при этом не били друг друга. Это заведомо будет выполнено, если ставить их на соответствующую линию достаточно далеко от первого ферзя: например, первого – на расстоянии 10, второго – на расстоянии 100, третьего на расстоянии 1000, и т. д.

Следующую группу ферзей мы расставим так, чтобы они били 8 следующих линий (если одна из этих линий уже бита одним из расставленных ранее ферзей, значит, в очередной группе будет не 8 ферзей, а меньше). Продолжая этот процесс, мы получим требуемую расстановку на бесконечной доске.

б) Раскрасим доску обычным образом в белый и черный цвет. Теперь ясно, что все поля «вторых» диагоналей одного цвета – например черного, и поэтому «белые» диагонали другого направления заполнить не удастся.

в) Это возможно. Решение примерно такое же, как в а): следует расставлять ферзей на очередных горизонталях и вертикалях, следя за тем, чтобы они все время попадали на «пятые» диагонали.

5. Ответ. Нет.

Доказательство. В самом деле, пусть ферзи расставлены каким-то образом. Ясно, что достаточно рассматривать случай, когда на каждой вертикали стоит по одному ферзю. Занумеруем горизонтали и вертикали доски от 0 до 14, и пусть ферзь с нулевой вертикали стоит на горизонтالي номер i_0 , с первой вертикали – на горизонтали номер i_1 и т.д. Нетрудно проверить, что для того, чтобы ферзи не били друг друга, должны выполняться три условия:

а) $\{i_0, i_1, \dots, i_4\} = \{0, 1, \dots, 14\}$ (ферзи не бьют друг друга по горизонталям);

б) $\{i_0 + 0, i_1 + 1, \dots, i_4 + 14\} = \{0, 1, \dots, 14\} \bmod 15$ (ферзи не бьют друг друга по диагоналям одного направления);

в) $\{i_0 - 0, i_1 - 1, \dots, i_4 - 14\} = \{0, 1, \dots, 14\} \bmod 15$ (то же по диагоналям второго направления).

Сложим эти три равенства. Мы получим:

$$\begin{aligned} \{i_0, i_0 - 0, i_0 + 0, i_1, i_1 - 1, i_1 + 1, \dots, i_4, i_4 - 14, i_4 + 14\} = \\ = 3\{0, 1, \dots, 14\} \bmod 15. \quad (i) \end{aligned}$$

Теперь (решающий шаг в доказательстве) перейдем в равенстве (i) от модуля 15 к модулю 3. Поскольку ясно, что $\{0, 1, \dots, 14\} = 5\{0, 1, 2\} \bmod 3$, имеем:

$$\begin{aligned} \{i_0, i_0 - 0, i_0 + 0, i_1, i_1 - 1, i_1 + 1, \dots, i_4, i_4 - 14, i_4 + 14\} = \\ = 15\{0, 1, 2\} \bmod 3. \quad (ii) \end{aligned}$$

С другой стороны, ясно, что

$$\{i_1, i_1 - 1, i_1 + 1\} = \{0, 1, 2\} \bmod 3 \quad (iii)$$

независимо от выбора i_1 . Аналогичное равенство справедливо для i_2 и других чисел – исключая, однако, i_0 и другие i , у которых индекс делится на 3. Не делящихся на 3 индексов 10; вычтя десять равенств типа (iii) из равенства (ii), мы получим:

$$\begin{aligned} \{i_0, i_0 - 0, i_0 + 0, i_3, i_3 - 3, i_3 + 3, \dots, i_{12}, i_{12} - 12, i_{12} + 12\} = \\ = 5\{0, 1, 2\} \bmod 3. \end{aligned}$$

Но это последнее равенство явно невозможно, так как правая часть «делится на 5», а левая «делится на 3»; говоря яснее, левая часть по модулю 3 совпадает с $3\{i_0, i_3, \dots, i_{12}\}$, а правая часть содержит число 0 пять раз. Это завершает доказательство.

Замечание. В наших рассуждениях мы пользовались идеологией «теории именованных множеств». Не вдаваясь в подробности, скажем, что в именованное множество элемент может входить не один, а несколько раз; таким образом, если в обычной теории множеств $\{1, 2\} \cup \{1, 3\} = \{1, 2, 3\}$, то в теории именованных множеств $\{1, 2\} \cup \{1, 3\} = \{1, 1, 2, 3\}$. При таком подходе ясно, например, что если $\#(M)$ – число элементов множества M , то $\#(M \cup N) = \#(M) + \#(N)$ (что, разумеется, неверно в обычной теории множеств). Именно в силу этого и ему подобных равенств в теории именованных множеств можно так спокойно складывать и вычитать равенства с множествами, как мы это делали выше.

Впрочем, читатель легко убедится, что все выше приведенные рассуждения могут быть проведены и в рамках обычной теории множеств; для этого следует только рассуждать не с множествами чисел, а, скажем, с множествами листов бумаги, на каждом из которых написано какое-то число; тогда, скажем, равенство (i) означает, что когда мы сложим вместе листки, на которых написаны элементы первых трех множеств, то среди этих 45 листов будут 3, на которых написана цифра 0, три – с цифрой 1, и т.д.

6. Ответ. 31.

Решение. Будем считать наш многоугольник 64-угольником, т.е. будем считать, что часть углов равна 180° (остальные, очевидно – 90° или 270°).

Очевидно, если угол в данной клетке равен 90° , то от клетки берется ее четверть; если 180° – то половина, и если 270° – то три четверти. Таким образом, площадь пропорциональна сумме углов с коэффициентом $1/360$.

Но сумма углов n -угольника известна и равна $180^\circ \cdot (n - 2)$, причем легко видеть, что если рассматривать, как это делаем мы, также и несколько развернутых углов, то формула остается справедливой. Отсюда сразу получаем ответ.

7. Ответ. а) g8; б) g1.

Решения обоих пунктов основаны на одном и том же соображении: *маршрут имеет ориентацию*. В задаче а) ладья могла попасть на a2 только по маршруту b1-a1-a2-b2 (иначе осталась бы не пройденной клетка a1). Это означает, что она обходила доску по часовой стрелке, откуда и следует ответ.

В задаче б), поскольку маршрут не замкнут, ладья в принципе может менять его ориентацию. Однако поскольку углы а1 и h8 ладья обходит против часовой стрелки, то и угол h1 она обязана обходить против нее, тогда как перед тем, как пройти угол а8, она изменила ориентацию пути.

8. Ответ. Выигрывают черные.

Решение. Если бы белая ладья вначале стояла на а1, а черная – на h8, то у черных была бы очевидная стратегия (симметрия относительно центра), позволяющая им всегда сделать ход – следовательно, у белых когда-нибудь ходы кончились бы.

Наша задача сводится к этой перенумерацией рядов доски. Дадим второй горизонтали номер 1, четвертой – номер 8, остальные занумеруем произвольно. Аналогичным образом поступим относительно вертикалей. Теперь ладьи стоят на полях а1 и h8, следовательно, проходит ранее указанное решение.

9. Ответ. 29.

Пример строится без больших трудностей. Один из возможных маршрутов показан на рисунке 2 (темным выделены три клетки, на которые слону не удалось попасть).

	15		17		19		
14		16		18		20	
	13		27		29		21
12		26		28		22	
	11		25		23		1
10				24		2	
	9		7		5		3
		8		6		4	

Рис. 2

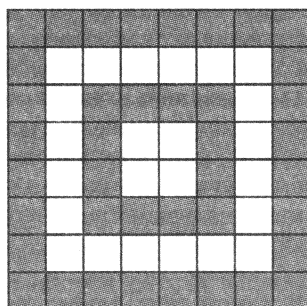


Рис. 3

Для доказательства того, что больше не получится, разделим доску на 4 кольца и заштрихуем часть клеток, как показано на рисунке 3.

При этом заштриховано 40 клеток, в том числе 20 черных, а не заштриховано только 24 (12 черных), и поскольку при каждом ходе мы переходим из одного кольца в другое, получается, что обойти можно не более 24 черных клеток. Что и требовалось доказать.

Позвольте! Требовалось доказать, что обойти можно не более 29 – а мы что сделали? Мы доказали слишком много, и значит, где-то ошибка. Или даже две ошибки.

Одна, достаточно стандартная ошибка состоит в том, что мы забыли: можно начать со штрихованного поля и кончить тоже на штрихованном. Это даст нам плюс единицу: 25 вместо 24. А где еще 4 единицы?

Дело в том, чт.е. 4 места (но только 4!), где можно перейти со штрихованной клетки опять на штрихованную: это переходы h2-g1, a7-b8, f4-e3 и c5-d6. (Есть также 3 места, где можно перейти с нештрихованной клетки на нештрихованную, но они нам ни к чему).

Эти 4 перехода (все они реализованы в приведенном маршруте) и позволяют получить 29 обойденных клеток вместо 25. Больше уж никак не выходит.

Геометрия

10. Решение. Пусть B_1, B_2, \dots, B_{10} — точки касания. Тогда

$$\angle B_1OB_2 = 180^\circ - \angle B_1A_2B_2.$$

Таким образом, нам известны все центральные углы B_iOB_{i+1} . Построим произвольную окружность, разделим ее на эти углы и проведем в точках B_i касательные к окружности. Полученный 10-угольник будет подобен искомому. Остается построить подобный 10-угольник со стороной нужной длины.

11. Указание. Концы искомых векторов находятся на окружности S , равной данной, с центром O' таким, что $\overrightarrow{OO'} = \vec{v}$. Если вектор \vec{v} слишком короткий, то можно добиться того, что искомый угол будет равен 180° , если же он достаточно длинный, то максимальным будет угол между двумя касательными из точки O к окружности S .

12. Ответ. Нельзя.

В самом деле, выберем первую точку O произвольно и соединим ее с вершинами квадрата A, B, C, D . Легко видеть, что если сторона квадрата равна 1, то $S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OCD} = \frac{1}{2}$, тогда как для выполнения условия эта сумма должна была бы равняться $\frac{4}{9}$ или $\frac{5}{9}$.

13. Решение 1. Рассмотрим плоскость P , параллельную координатной и отстоящую от нее на целое число. В ней лежат изюминки. Потребуем дополнительно, чтобы P не совпадала ни с одной из плоскостей разреза P и (если они параллельны) не лежала от них на расстоянии меньше 0,1. Очевидно, такая P существует, поскольку плоскостей, параллельных координатным, бесконечно много. Тогда легко сообразить, что разрезанны-

ми в плоскости P окажутся только изюминки, лежащие в нескольких более или менее широких полосах, соответствующих пересечению нашей плоскости с плоскостями разреза. После этого остается решить задачу, аналогичную исходной, но уже в плоскости. Разберите ее сами.

Решение 2. Рассмотрим достаточно большой куб со стороной A . Разрезанными в этом кубе окажутся изюминки, находящиеся на расстоянии меньше чем $0,1$ от одной из плоскостей, т.е. внутри нескольких «листов» толщины $0,2$. Объем всех этих листов не превосходит $0,2 N \cdot S$, где N — число плоскостей, а S — максимальная площадь пересечения плоскости с кубом. Нетрудно сообразить, что S не превосходит суммы проекций секущей плоскости на координатные, и уж не больше $3A^2$. Таким образом, при больших A суммарный объем разрезанных изюминок может расти только как A^2 . Между тем суммарный объем всех изюминок в кубе растет как A^3 .

14. Ответ. Да, сможет.

На рисунке 4, $a-d$ показана одна из возможностей. Очевидно, фигура, возникшая после третьего отражения, по площади равна

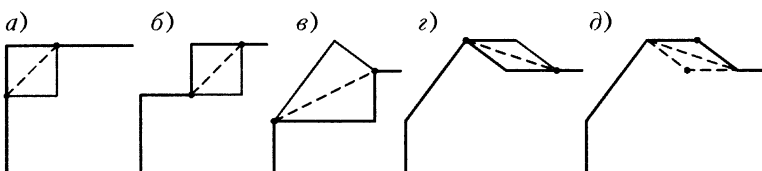


Рис. 4

исходному квадрату, но не выпукла. Поэтому после 4-го отражения площадь исходного квадрата увеличится, что и требуется.

15. Решение. Ребрами этих тетраэдров служат диагонали граней куба. Поэтому пересечение тетраэдров имеет на каждой грани только одну точку — ее центр. Отсюда легко следует, что само пересечение является выпуклой оболочкой этих шести точек $F_1 F_2 \dots F_6$, т.е. октаэдром. Его объем равен сумме объемов двух четырехугольных пирамид $F_1 \dots F_5$ и $F_2 \dots F_6$ (точки F_1 и F_6 лежат на противоположных гранях); основание такой пирамиды имеет площадь $\frac{1}{2}$, высота тоже равна $\frac{1}{2}$. Поэтому объем пересечения равен $2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

16. Решение. а) Разрежем куб на 8 равных кубиков с ребром $\frac{1}{2}$ тремя плоскостями, параллельными граням. Тогда от каждого

из этих кубиков отрезает некую часть лишь одна пирамида; стало быть, она должна делить кубик пополам, а для этого она должна пройти через его центр. Если, например, грани исходного куба задаются уравнениями $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$, то центр одного из кубиков имеет координаты $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Отсюда уже легко установить, что уравнение соответствующей плоскости имеет вид $x + y + z = \frac{3}{4}$; следовательно, $a = \frac{3}{4}$.

6) Решение аналогично. Заметим, что если $n > 4$, то откладывать отрезок придется уже не на ребре, а на его продолжении.

Ответ. $a = \frac{n}{4}$.

17. Решение. Пусть a – площадь большого круга, а b – площадь сегмента, отсекаемого от него касательной из условия задачи (заметьте, что эта площадь одинакова для всех трех сегментов). Тогда нетрудно видеть, что $S_1 + S_2 + S_3 - S = 3b - a$.

18. Решение. Пусть у начального восьмиугольника $AB = a$, $BC = b \neq a$. Пусть, например, $a > b$.

Пусть a_1 , b_1 – стороны восьмиугольника $A_1B_1 \dots H_1$. Тогда числа a , b , a_1 , b_1 удовлетворяют соотношениям: $a_1 + \sqrt{2}b_1 = a$, $b_1 + \sqrt{2}a_1 = b$.

Вычитая эти равенства одно из другого, мы видим, что $(\sqrt{2} - 1)(b_1 - a_1) = a - b$. Но это означает, что $b_1 - a_1$ в два с лишним раза больше, чем $a - b$. С другой стороны, ясно, что сами числа a_1 , b_1 меньше, чем числа a и b . Поэтому после нескольких операций разность $b_1 - a_1$ станет больше, чем сами числа, что абсурдно.

Но что же это означает геометрически? На первый взгляд кажется, что нет ничего, что могло бы помешать проводить все новые диагонали и продолжать процесс неограниченно. Ключ к разгадке – в последней фразе определения полуправильного восьмиугольника: «ни один из квадратов не лежит целиком внутри другого».

Восьмиугольник $A_1B_1 \dots H_1$, как и исходный, является пересечением двух квадратов; стороны одного из них – прямые AF , BE , DG и CH , а второго – AD , EH , CF , BG . Из наших рассуждений следует, что либо один из этих квадратов уже лежит внутри другого, либо это произойдет с очередными квадратами после нескольких операций. В этот момент процесс и должен оборваться.

19. Решение. Чтобы задать грань, зададим плоскость, в которой эта грань лежит. Рассмотрим плоскость $x = 1$. На ней лежат некоторые вершины, но легко сообразить, что, например, вершины $(2, 3, 1)$ и $(-1, 2, 3)$ лежат по разные стороны от нее: для одной $x > 1$, а для другой $x < 1$. Зато плоскость $x = 3$ – грань. На ней лежат все вершины $(3, y, z)$, где y и z принимают значения 1, 2 с любыми знаками. Ее легко нарисовать в плоскости (y, z) ; она представляет собой полуправильный восьмиугольник. Еще 5 подобных граней дают 5 уравнений $x = -3$, $y = \pm 3$, $z = \pm 3$.

Рассуждая аналогично, мы видим, что плоскость $x + y + z = 4$ – не грань, так как для некоторых точек сумма координат больше 4, а для некоторых меньше. Зато плоскость $x + y + z = 6$ задает грань, на которой лежат точки $(1, 2, 3)$, причем координаты могут стоять в произвольном порядке. Отсюда ясно, что соответствующая грань – шестиугольник, притом правильный, со стороной $\sqrt{2}$. Его стороны задаются парой вершин, у которых одна координата совпадает, например, $(3, 1, 2)$ и $(2, 1, 3)$. Всего граней, ей подобных, имеется 8 (включая ее саму) – например, это грань $-x - y + z = 6$.

Наконец, имеется последний тип грани, примером которой служит грань $x + y = 5$. Это прямоугольник; рассмотрите его самостоятельно. Всего получается $6 + 8 + 12 = 26$ граней.

Для того чтобы убедиться в том, что других граней нет, достаточно проверить: а) что каждая вершина лежит на трех из числа перечисленных граней; б) что любые две грани, имеющие общую вершину, имеют и вторую общую вершину, т. е. общее ребро. Сделайте это сами.

20. Ответ. 2 000 000.

Решение. 1) Поскольку площадь шестиугольника равна 1, в квадрат попало около миллиона шестиугольников. Рассмотрим любую прямую, продолжающую одну из сторон какого-нибудь шестиугольника; легко заметить, что на такой прямой лежит 2 вершины шестиугольников, затем центр очередного шестиугольника, опять 2 вершины, центр и т. д. Отсюда следует, что вершин вдвое больше, чем центров.

2) Для того чтобы этот набросок решения превратить в корректное решение (т.е. принять во внимание, что некоторые шестиугольники лежат в квадрате лишь частично и т.п., и доказать, что возникающие из-за этого ошибки находятся в пределах разрешенных пяти процентов), следует только проследить, что именно происходит на границе квадрата.

Заметим, что сторона шестиугольника, а также расстояние от его вершины до центра (они равны между собой), меньше 1. Рассмотрим теперь наряду с данным квадратом X concentричный ему квадрат Y со стороной 994; разность двух квадратов образует «рамочку» ширины 3. Число шестиугольников, которые пересекаются (полностью или частично) с квадратом Y , не меньше, чем 994^2 , их центров – столько же, и центр любого из них содержится в квадрате со стороной 996. Зафиксируем теперь направление одного из ребер; мы видим, что и 2 вершины, следующие по этому направлению за центром шестиугольника, также лежат внутри квадрата X ; следовательно, вершин в квадрате X во всяком случае не меньше, чем $2 \cdot 994^2$. Эта оценка укладывается в допустимые 5%. Чтобы получить оценку сверху, надо окружить квадрат X такой же рамочкой ширины 3 и убедиться, что число вершин в данном квадрате меньше, чем $2 \cdot 1006^2$.

Вопрос к читателю. Действительно ли ошибку нельзя оценить точнее, чем пятью процентами? Попробуйте получить оценку лучше.

21. Ответ. Такого S не существует (например, если одна фигура круглая, а другая длинная).

22. Указание. Если отразить A относительно любой из этих прямых, то отраженная точка попадет на прямую BC .

23. Решение. Предположим для начала, что вектор $\overline{A_1B_1}$ обладает следующим свойством: более шести других векторов $\overline{A_iB_i}$ таковы, что $A_iB_i < 0,3$. Но тогда легко убедиться, что именно эти 7 (или более) векторов удовлетворяют условию задачи, так как

$$A_iB_j \geq A_iB_i - B_iA_1 - B_jA_1 \geq 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \geq \frac{1}{3}.$$

Аналогично разбирается случай, когда существует семь или более таких векторов $\overline{A_iB_i}$, что $A_iB_i < 0,3$.

Теперь предположим, что и то и другое неверно, и начнем подбирать нужную семерку. В качестве первого вектора возьмем $\overline{A_1B_1}$. Из оставшихся 79 придется выбросить, как не соответствующие условиям, не более 12 векторов (шесть и шесть, как выше). В качестве второго возьмем любой из оставшихся; в отношении двух выбранных векторов условие задачи выполняется, а выбросить, как и на первом шаге, придется не более 12 векторов. После 6 шагов будет взято 6 векторов и выброшено не более 72, поэтому останется еще по крайней мере два вектора, любой из которых можно взять в качестве седьмого искомого.

24. Решение. Пусть A – ближайшая к плоскости вершина куба. Допустим сначала, что она лежит на плоскости. Пусть e, f, g – это расстояния от плоскости до трех вершин, находящихся с A на одном ребре (или, иными словами, это проекции ребер куба на нормаль к плоскости). Тогда легко видеть, что остальные расстояния равны $e + f, e + g, f + g$ и $e + f + g$, причем последнее расстояние наибольшее; примем его за h . Тогда

$$0 + (e + f) + (e + g) + (f + g) = e + f + g + (e + f + g),$$

т.е. справедлива формула а). Далее, элементарная выкладка показывает, что

$$e^2 + f^2 + g^2 + (e + f + g)^2 = (e + f)^2 + (e + g)^2 + (f + g)^2,$$

$$e^3 + f^3 + g^3 + (e + f + g)^3 = (e + f)^3 + (e + g)^3 + (f + g)^3 + 6efg.$$

Обозначим через Q_1, Q_2 левую и правую части первых двух равенств (суммы первых и вторых степеней). Заметим еще, что сумма нулевых степеней расстояний для обеих частей равна 4; положим поэтому $Q_0 = 4$. Пусть теперь вершина A лежит от плоскости на расстоянии x , и пусть e, f, g – как выше, проекции ребер куба на нормаль к плоскости; тогда расстояния от вершин до плоскости равны $x + e, x + f, x + e + f$ и т.д.

Теперь нетрудно видеть, что суммы первых, вторых и третьих степеней как в правой, так и в левой части представляют собой многочлены от x степени 1, 2, 3 соответственно, а именно:

$$P_1(x) = Q_0x + Q_1,$$

$$P_2(x) = Q_0x^2 + 2Q_1x + Q_2,$$

$$P_3(x) = Q_0x^3 + 3Q_1x^2 + 3Q_2x + R,$$

где R – сумма кубов (одна или другая). Отсюда видно, что суммы первых и вторых степеней равны, а разность сумм кубов не зависит от x и равна $6efg$.

25. Ответ. Коля назвал угол C (ни при каких m, n нельзя доказать, что наименьший – угол A или угол B). Точка N на плоскости (m, n) лежит внутри четырехугольника $PQRS$ с вершинами $P(0, 0), Q(1/2, 0), R(1/3, 1/3), S(0, 1/2)$ или на его границе. Точка M , соответственно, лежит вне $PQRS$.

Пример. Пусть $N = R$, т.е. стороны треугольника удовлетворяют равенству $3AB = AC + BC$. Тогда без труда доказывается, что сторона AB – наименьшая.

Решение. Примем, что сторона AB имеет длину 1, и пусть x, y – длины сторон AC и BC . Тогда точка $W(x, y)$ задает нам треугольник. Однако годится не любая точка W ; в силу неравенств треугольника ее координаты должны удовлетворять нера-

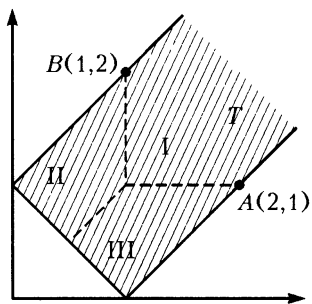


Рис. 5

венствам $x + y > 1$, $x + 1 > y$, $x - 1 < y$. Геометрически это означает, что точка W лежит внутри бесконечного треугольника T , показанного на рисунке 5. Области I, II, III, на которые разбит T , — это части, в которых наименьшей из сторон является соответственно AB , AC , BC .

Согласно условию стороны x , y удовлетворяют линейному уравнению $mx + ny = 1$. Для того чтобы из этого уравнения можно было установить, какая сторона (или, соответственно, какой угол) является наименьшей, требуется, чтобы вся та часть прямой, которая лежит внутри T , лежала внутри одной из областей I, II, III. Из чертежа сразу видно, что если $m > 0$, $n > 0$, то это возможно лишь для области I и задача, заданная Коле, разрешима в том случае, если точки $A(2, 1)$ и $B(1, 2)$ лежат под прямой. Это означает, что числа m , n удовлетворяют неравенствам $2m + n \leq 1$, $m + 2n \leq 1$, которые в совокупности с неравенствами $m > 0$, $n > 0$ задают четырехугольник $PQRS$.

26. Решение. Задача в предложенной формулировке, строго говоря, решения не имеет, так как ни максимум, ни минимум не достигаются.

В самом деле, легко сообразить, что периметр больше $2a$ (ломаные ABC и ADC длиннее отрезка AC), но меньше $2(a + b)$. Рисунок 6 показывает, как можно неограниченно приблизиться к тому и другому пределу, но достичь их, очевидно, невозможно.

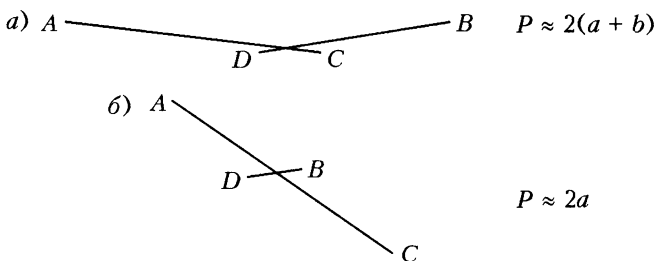


Рис. 6

Замечание. На XXV Турнире городов (2004) задача была дана в следующей формулировке.

Периметр выпуклого четырехугольника равен 2004, одна из диагоналей равна 1001. Может ли вторая диагональ быть равна 1; равна 2; равна 1001?

С учетом сказанного выше ясно, что ответы на эту задачу: нет; да; да.

27. Ответ. Обязательно.

Решение. Достаточно доказать, что $A_1A_2 = A_2A_3$. Тогда из симметрии условия получим, что все стороны семиугольника равны.

Заметим, что по признаку равенства треугольников (по трем сторонам) треугольники $A_6A_1A_3$, $A_7A_2A_4$, $A_1A_3A_5$, ..., $A_5A_6A_2$ равны, кроме того, все эти треугольники равнобедренные. Пусть углы при основаниях этих равнобедренных треугольников равны α , углы при вершинах, противолежащих основаниям, равны β .

Заметим, что

$$\begin{aligned}\angle A_2A_4A_1 &= \angle A_2A_4A_6 - \angle A_1A_4A_6 = \beta - \alpha = \\ &= \angle A_3A_5A_7 - \angle A_2A_5A_7 = \angle A_3A_5A_2,\end{aligned}$$

откуда треугольники $A_2A_4A_1$ и $A_3A_5A_2$ равны (по двум сторонам и углу между ними). Это значит, что

$$A_1A_2 = A_2A_3.$$

28. Решение. Чтобы построить пример, требуемый в задаче б), можно обойтись пятиугольником (рис.7,а).

Пример для задачи в) – семиугольник (рис.7,б).

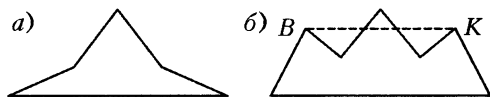


Рис. 7

Докажем теперь, что из одной из соседних вершин A , B можно провести диагональ. Для этого рассмотрим два случая: $\angle A > 180^\circ$ и $\angle A < 180^\circ$.

В первом случае продолжение стороны BA лежит (поначалу) внутри многоугольника; продолжим ее за точку A до пересечения с контуром многоугольника. Если точкой пересечения является вершина, то нужная диагональ уже построена, в противном случае точка пересечения F лежит на некоторой стороне CD (мы считаем, что вершины многоугольника идут в порядке $BA \dots CD \dots$) Будем сдвигать точку F вдоль стороны CD в сторону D . Тогда либо она сдвинется до точки D (и в этом случае AD – искомая диагональ), либо этому помешает некоторая вершина много-

угольника G , которая встанет на пути. В этом случае искомая диагональ – AG .

Если же $\angle A < 180^\circ$, то рассмотрим соседние с A вершины B и C . Либо BC – искомая диагональ, либо внутри треугольника ABC лежит часть контура, и в том числе некоторые вершины. Выберем из них вершину H , ближайшую к A , тогда AH – искомая.

29. Решение. Так как площадь треугольника ABC не зависит от выбора точки C , а с другой стороны, равна $AC \cdot BC \cdot \sin \angle C$, следовательно, точку C надо выбрать так, чтобы $\sin \angle C$ был максимален.

Построим на AB , как на диаметре, окружность (рис.8). Если эта окружность пересекается с прямой, то искомым точек две, и это – точки пересечения (угол C прямой).

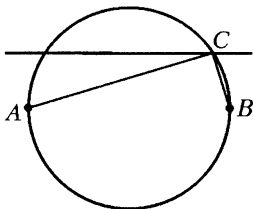


Рис. 8

Если же она не пересекается с прямой, то синус будет максимальным для максимального угла ACB (синус растет вместе с углом). Этот угол максимален для равнобедренного треугольника: $AC = BC$. В самом деле, через A и B можно провести окружность, касающуюся прямой в точке C . Для любого другого треугольника ABE точка E лежит вне этой окружности, соответственно, $\angle AEB < \angle ACB$.

30. Решение. Построим произвольный такой четырехугольник, разрежем его по диагонали AC и отразим треугольник ACD относительно срединного перпендикуляра. Мы получим четырехугольник $ABCD'$ (точка D' – образ точки D , а точки A и C перешли друг в друга), у которого длины сторон те же, но теперь стороны идут в другом порядке: $AB = 3$, $BC = 4$, $CD' = 5$ и $D'A = 6$. Очевидно, площадь от такой операции не изменилась.

Теперь разрежем четырехугольник $ABCD'$ по диагонали BD' на два треугольника. Тогда очевидно, что их площади не превосходят $(BC \cdot CD')/2 = 10$ и $(BA \cdot AD')/2 = 9$. Таким образом, площадь четырехугольника не превышает 19, причем равенство было бы возможно только в случае, если бы оба угла C и A были прямые. Но это, как легко видеть, невозможно (диагональ BD' не может одновременно служить гипотенузой треугольников ABD' и CBD'). Поэтому неравенство $S_{ABCD} = S_{ABCD'} \leq 10 + 9 = 19$ является строгим.

Замечание 1. Поскольку разница между суммами квадратов $BC^2 + CD^2$ и $DA^2 + AB^2$ невелика, максимальное значение

меньше 19, но весьма близко к нему. (На самом деле достигается значение 18,973..., т.е. ошибка меньше 0,03, или 0,15%).

Замечание 2. Площадь четырехугольника со сторонами a, b, c, d максимальна, если он – вписанный (т.е. если $\angle A + \angle C = \pi$).

31. Ответ. а) Нет; б), в) да.

В случае в) достаточно разрезать квадрат на три равных прямоугольника размером $1 \cdot 1/3$.

В случае б) разрезать нужно аккуратнее. Отрежем от квадрата полосу ширины $1/8$, а оставшийся прямоугольник $1 \cdot 7/8$ разделим на два прямоугольника $1/2 \cdot 7/8$ (рис.9). Квадрат диаметра каждого их трех равен $65/64$, и диаметр $d \approx 1,0078 < 1,01$.

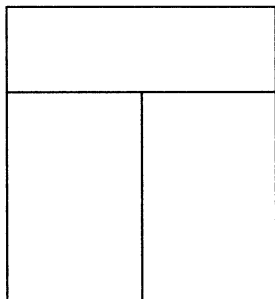


Рис. 9

Замечание. Оценка $d = d_0 = \sqrt{\frac{65}{64}}$

является точной. Докажите это сами.

32. Ответ. а) Не может; б) может.

а) Для того, чтобы все углы были меньше 70° , требуется непременно разрезать угол α . После этого появится угол, который не больше 35° . Ясно, что в дальнейшем он никуда не исчезнет (если его разрезать, он станет только меньше). Но если в треугольнике один угол не превышает 35° , то один из двух других не меньше, чем $(180^\circ - 35^\circ)/2 > 70^\circ$.

б) Предположим, что треугольник равнобедренный, т.е. в нем один угол (пусть это угол A) равен 80° , и два угла B, C – по 50° . Проведя биссектрису угла A , мы получаем два угла по 40° . Далее можно нарисовать картинку, в которой все углы не превосходят 75° (рис.10).

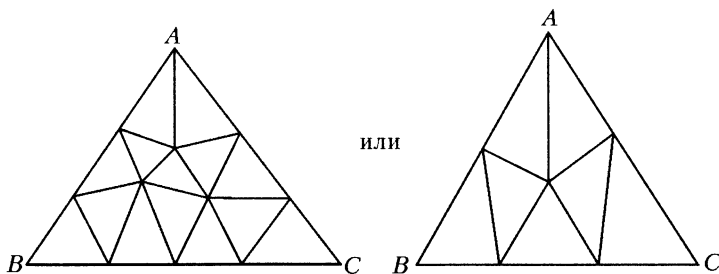


Рис. 10

33. Решение. а) Объемы куба и октаэдра, вписанных в шар радиуса R , нетрудно найти непосредственно. Мы, однако, пойдем другим путем, который имеет то важное преимущество, что он годится также и для задачи б).

Во всех указанных случаях вписанное тело можно разбить на пирамиды с общим центром в центре сферы. Для этого нужно соединить центр шара со всеми вершинами данного тела, и получится разбиение: куба – на шесть четырехугольных пирамид, октаэдра – на восемь треугольных, додекаэдра – на 12 пятиугольных и икосаэдра – на 20 треугольных.

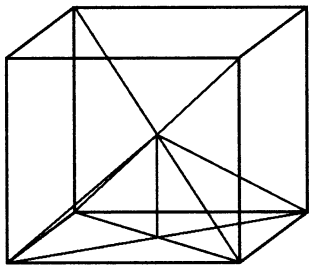


Рис. 11

Итак, разобьем куб на эти 6 пирамид (рис.11), а затем каждую из пирамид дополнительно разобьем на 4 неправильные треугольные пирамиды (для этого нужно еще из центра шара опустить перпендикуляр на соответствующую грань куба, и соединить полученную точку с вершинами грани).

Таким образом, мы получили 24 одинаковых треугольных пирамиды. У такой пирамиды есть 3 попарно перпендикулярных ребра, откуда легко следует, что объем пирамиды равен $1/6$ произведения этих ребер, т.е.

$$V = \frac{H(R^2 - H^2)}{6}. \text{ Соответственно, объем куба в 24 раза больше.}$$

Точно так же мы можем разбить октаэдр на 24 неправильных треугольных пирамиды (8 граней, и на каждой 3 пирамиды), для которых верно почти все сказанное, за одним важным исключением. Из трех ребер этой пирамиды одно (высота) по-прежнему перпендикулярно двум другим, но два ребра основания образуют уже не прямой угол, а угол 120° ; соответственно, объем равен произведению трех ребер на синус этого угла, или

$$V = \frac{H(R^2 - H^2)}{6} \cdot \sin 120^\circ.$$

По условию задачи, радиус R , входящий в эти две формулы, для куба и октаэдра один и тот же. Но теперь заметим (это – важнейший момент рассуждения!), что и высота H в этих двух формулах одна и та же.

В самом деле, как известно, центры граней куба являются вершинами правильного октаэдра, тогда как центры граней этого октаэдра вновь являются вершинами куба, который полу-

чается из исходного гомотетией. Отсюда видно, что угол ϕ между векторами \overline{OA} и \overline{OG} (O – центр шара, G – центр одной из граней тела, A – одна из вершин этой грани) для куба и октаэдра один и тот же: фактически, векторы \overline{OA} и \overline{OG} для куба и октаэдра одни и те же, только они меняются ролями и, соответственно, имеют разные длины. Но это и означает, что высоты $H = R \cdot \sin \phi$ для куба и октаэдра равны.

Соответственно, отношение объемов куба и октаэдра равно $\frac{\sin 90^\circ}{\sin 120^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1,155$. Конечно, этот ответ нетрудно получить и прямым вычислением объемов обоих тел (сделайте это!).

б) Теперь для решения задачи б) остается заметить, что все проведенные рассуждения проходят также для додекаэдра и икосаэдра. В частности, оба они разбиваются на одинаковое число треугольных пирамид (только на этот раз их не 24, а $60 = 12 \cdot 5 = 20 \cdot 3$), и опущенные на грани перпендикуляры также равны по длине.

Что же касается угла при основании, то он равен $2\pi/k$, где k – число сторон пирамиды. Таким образом, для икосаэдра, как и для октаэдра, он равен 120° (впрочем, это отнюдь не значит, что их объемы равны: число пирамид различно, да и высоты у них разные), а для додекаэдра 72° .

Отсюда следует, что отношение объемов додекаэдра и икосаэдра равно $\frac{\sin 72^\circ}{\sin 120^\circ} \approx \frac{0,951}{0,866} \approx 1,1$.

34. Лемма 1. Число частей равно $1 + a + b + c$, где a , b , c – соответственно число горизонтальных линий, пересекающих данный квадрат, вертикальных линий и узлов сетки.

Доказательство проще всего провести, сначала стерев все линии (тогда остается одна часть), а затем восстанавливая их одну за другой. Каждый раз, когда мы проводим новую линию или когда линия пересекает одну из уже восстановленных (т.е. появляется узел) – возникает еще одна часть.

Лемма 2. В квадрате со стороной 1 нельзя поместить треугольник, у которого основание и высота, на него опущенная, оба не меньше 1 и не параллельны сторонам квадрата.

Доказательство легко следует из того, вполне элементарного, факта, что в квадрат со стороной 1 не может поместиться треугольник площади больше $1/2$, причем равенство возможно только если основание треугольника совпадает со стороной квадрата.

Ответ. Число частей не меньше 4 и не больше 6.

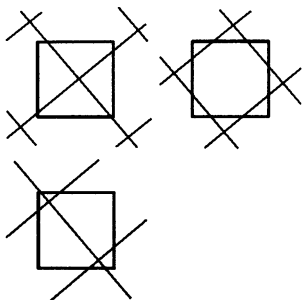


Рис. 12

Примеры для 4, 5 и 6 частей легко нарисовать (рис.12).

Для того, чтобы доказать, что частей не может быть меньше или больше, выясним, чему могут быть равны числа a , b , c . Поскольку «ширина» наклонно лежащего квадрата в горизонтальном или вертикальном направлении больше 1, но заведомо меньше 2, ясно, что первые два числа не могут быть меньше 1 или больше 2. Легко также убедиться в

том, что c не может быть больше 2, тогда как значения 0, 1 или 2 допустимы – это видно из приведенных рисунков.

Допустим, что частей всего 3; из сказанного следует, что это возможно только в случае $a = b = 1$, $c = 0$. Но тогда наш квадрат целиком помещается в трех квадратах, именно так, как показано на рисунке 13, и мы видим, что эта картинка противоречит лемме 2.

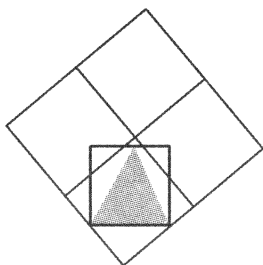


Рис 13

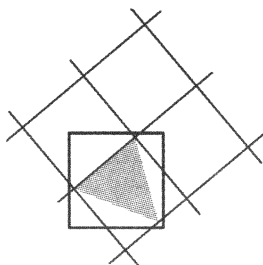


Рис 14

Случай семи частей, как ни странно, аналогичен в том смысле, что сводится к той же лемме (рис.14).

35. Попробуем приблизительно вычислить число частей. Для этого будем считать, что верхний прямоугольник не положен на нижний, а нарисован на нем. Сотрем теперь все его линии и будем их восстанавливать одну за другой. Мы будем считать, что верхний прямоугольник – тот, число частей в котором надо оценить – расположен параллельно осям (его линии вертикальны и горизонтальны), а линии нижнего, по всей вероятности, наклонны.

Итак, вначале мы рисуем только верхний прямоугольник размером 1000×2000 без внутренних линий. В данный момент части, на которые он разделен, – это квадратики нижнего

листка, а на границе – части квадратиков. Поскольку почти все части имеют площадь 1, ясно, что число частей немного больше, чем 2 миллиона.

Теперь будем проводить одну за другой линии верхнего прямоугольника, сначала горизонтальные, потом вертикальные. Каждая линия дает столько новых частей, на сколько частей она разбивается точками пересечения. Имеется около двух миллионов точек пересечения горизонталей с вертикалями, и кроме того, надо сосчитать, сколько есть точек пересечения новых линий, которые мы рисуем, с линиями нижней сетки.

Пусть наименьший угол между линиями верхней и линиями нижней решеток равен α . Каждая верхняя линия имеет длину 1000 или 2000. Рассмотрим, например, линии длины 1000. Число пересечений такой линии с линиями нижней приблизительно равно $1000 \cdot (\sin \alpha + \cos \alpha)$. Эта величина максимальна, если $\alpha = \pi/4$, и в этом случае она составляет $1000 \cdot \sqrt{2}$. Случай линий длины 2000 полностью аналогичен, и легко убедиться, что число частей приблизительно равно $2 \cdot 10^6 \cdot (2 + 2\sqrt{2}) \approx 2 \cdot 4,83 \cdot 10^6$.

Остается проверить, что эффекты, связанные с границей прямоугольника, незначительны, так что коэффициент при миллионе остается меньше 10.

36. Решение. Проведем все диагонали 17-угольника; они разбивают его на несколько многоугольников. Очевидно, что в каждом из этих многоугольников кратность постоянна, или, иными словами, если двигать точку внутри такого многоугольника (т.е. не пересекая ни одной диагонали), то кратность точки не меняется.

Нам будет удобно также учесть еще всю бесконечную область вне 17-угольника, как еще одну часть; эта часть не покрыта, и потому ее кратность, разумеется, надо считать нулевой.

Теперь выберем для начала точку C вне 17-угольника, и начнем ее двигать к центру. Двигать мы будем не обязательно по прямой, но так, чтобы, во-первых, не проходить через вершины 17-угольника или точки пересечения диагоналей, а во-вторых, так, чтобы все время продвигаться ближе к центру (иначе говоря – угол между направлением к центру и направлением движения все время остается острым). Ясно, что можно, например, построить соответствующий маршрут в виде ломаной из двух звеньев.

Мы утверждаем, что при таком движении кратность точки все время возрастает. В самом деле, при пересечении одной из сторон многоугольника она из нулевой становится ненулевой, а при пересечении одной из диагоналей – мы «теряем» или

«приобретаем» все треугольники, для которых эта диагональ является одной из сторон. Очевидно, таких треугольников имеется 15, причем мы теряем те, у которых третья вершина лежит по одну сторону, и приобретаем те, у которых третья вершина лежит по другую. Очевидно и то, что когда мы приближаемся к центру, то вторых больше, чем первых.

Отсюда следует, что наименьшую кратность имеют точки, близко прилегающие к одной из сторон (она, очевидно, равна 15), а наивысшую – центр. Найдите эту кратность сами.

37. Ответ. Это прямой угол.

Доказательство. Пусть O – точка пересечения диагоналей, $\angle AOB = \alpha$. Тогда по теореме косинусов

$$AB^2 + CD^2 =$$

$$= OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos \alpha + OC^2 + OD^2 - 2OC \cdot OD \cdot \cos \alpha,$$

и аналогичная формула для $BC^2 + AD^2$, но произведения идут с противоположным знаком.

Поэтому, зная соотношение между $AB^2 + CD^2$ и $BC^2 + AD^2$, можно сказать, будет ли угол острым (это будет тогда и только тогда, когда первое меньше второго), тупым или прямым. В данном случае $AB^2 + CD^2 = 100 + 121 = 221 = BC^2 + AD^2$, поэтому угол обязан быть прямым.

Стоит заметить, что отсюда следует более общий факт: допустим, что даны 4 стороны 4-угольника. Этого, разумеется, недостаточно, чтобы определить его форму: 4-угольник с данными сторонами «нежесткий», например, если это квадрат, то его можно деформировать в ромб. Однако при такой деформации сохраняется одно свойство угла между диагоналями: если он был острым, то он и останется острым (хотя может изменить свое значение), если был тупым – останется тупым, и что самое главное – если был прямым, то таким он и останется.

Условие же того, что угол между диагоналями прямой, таково: **суммы квадратов противоположных сторон равны.**

38. Ответ: 65 прямых.

Доказательство. При переходе с одного звена на другое мы должны перейти с одной прямой на другую. Отсюда следует, что все вершины ломаной, кроме, может быть, первой и последней – точки пересечения данных прямых (мы будем называть их *узлами*), и, соответственно, все звенья, кроме первого и последнего – отрезки, начинающиеся и кончающиеся в этих узлах.

Допустим, что прямых не более n . Тогда на каждой прямой не более $(n - 1)$ узлов, и потому на каждой лежит не более

$\lceil (n-1)/2 \rceil$ звена (не считая первого и последнего). Таким образом, всего звеньев не более чем $2 + n \cdot \lceil (n-1)/2 \rceil$. Для $n = 64$ это дает только 1986 звеньев, т.е. меньше, чем требуется.

Пусть теперь даны 65 прямых общего положения, т.е. никакие две не параллельны, и никакие три не пересекаются в одной точке. На каждой из них имеется 64 узла. Проведем звенья ломаной, соединив на каждой прямой первый по порядку узел со вторым, третий с четвертым, и т.д.; на каждой прямой получилось 32 звена, а всего их $65 \cdot 32 = 2080$. При этом каждый узел является концом двух звеньев, а это значит, что получилась замкнутая ломаная.

Однако остается еще одна проблема. Хотя мы получили вроде бы нужную ломаную (лишние звенья, разумеется, не помеха, их можно отбросить), но нет никакой гарантии, и даже никаких оснований думать, что она *связна*. По всей вероятности, она состоит из нескольких кусков.

Тем не менее теперь уже легко завершить решение. Выберем конкретные 65 прямых следующим образом: возьмем правильный 65-угольник и проведем в нем 65 самых длинных диагоналей (через 32 вершины на 33-ю); пусть это будут данные прямые. Очевидно, все точки пересечения лежат на диагоналях, т.е. внутри многоугольника.

Проведем изложенную выше конструкцию. Легко сообразить, что мы получили 16 замкнутых ломаных, каждая из которых представляет собой 130-угольную невыпуклую звезду или, если угодно, «зубчатое колесо», и эти колеса концентрически лежат одно внутри другого.

Осталось сообразить, как перестроить эту конструкцию, чтобы «связать» эти 16 ломаных, не выходя за пределы наших 65-ти прямых.

Сделать это нетрудно: на рисунке 15 показано, как это делается в случае 9-угольника. В результате число звеньев немного уменьшится (так, ломаная на рисунке имеет 35, а не 36 звеньев), но так как у нас имеется 71 «лишнее» звено, то никаких трудностей здесь возникнуть не может.

Но теперь поставим дополнительную задачу, решение которой неизвестно.

Пусть дано $2n + 1$ прямых «общего положения». На каждой из этих пря-

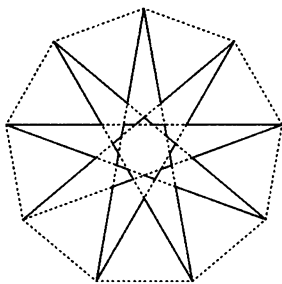


Рис 15

мых есть $2n$ точек пересечения с другими (тройных точек пересечения, по предположению, нет), которые высекают на ней два луча и $2n - 1$ отрезков.

Отметим на каждой прямой все нечетные отрезки, как выше. Получится замкнутая ломаная из $n(2n + 1)$ звеньев, которая, однако, совсем не обязана быть связной.

Вопрос: из скольких кусков она состоит или может состоять?

Число кусков может зависеть (и, вероятней всего, действительно зависит) от расположения прямых – т.е. ответ, по всей вероятности, не единственный. Интересно было бы хотя бы получить оценки сверху и снизу: «число кусков не больше того-то, но не меньше того-то».

39. Ответ. а) $0 < h \leq 1$; б) $\frac{3}{2} < m < \frac{5}{2}$; в) $0 < b < \frac{8}{5}$.

Решение. В задаче а) достаточно заметить, что высота, во всяком случае, не больше боковой стороны, но может ей равняться, если треугольник прямоугольный.

б) Построим сторону AC . Точка B лежит на окружности ω радиуса 1 с центром в A . Основание медианы должно лежать на пересечении двух окружностей: окружности неизвестного нам радиуса m с центром в A и окружности, гомотетичной ω с коэффициентом гомотетии $1/2$ и с центром гомотетии в B . Соответственно, число m должно быть таким, чтобы эти окружности пересекались, и тогда треугольник можно построить.

Легко убедиться, что если $m > 5/2$, то первая окружность целиком содержит вторую, а если $m < 3/2$, то напротив, она лежит целиком внутри. Случаи равенства означают, что окружности касаются друг друга, но тогда треугольник, который мы пытаемся построить, будет вырожденным (все три точки A, B, C – на одной прямой).

Решение задачи в) совершенно аналогично, с той разницей, что если основание медианы делит основание BC пополам, то основание биссектрисы делит его в отношении 1:4.

40. Анализ задачи. Сформулируем вопрос по-другому. Пусть имеется n кругов одного и того же радиуса r , и расстояние между центрами любых двух кругов не меньше d . При этом предполагается, что n задано, а мы будем искать соотношение между r и d .

Вопрос: какому неравенству должны удовлетворять числа r и d , чтобы можно было утверждать, что при любом расположении кругов можно один из них отделить от других?

Решение этой задачи. Предположим сначала, что центры кругов расположены в вершинах правильного n -угольника со стороной d . Пусть A, B, C – три последовательные вершины (рис.16); из соображений симметрии можно, не ограничивая общности, считать, что круг, которую нужно отделить – это круг с центром B . Прямая, отделяющая этот круг, конечно, обязана пересекать стороны AB и BC .

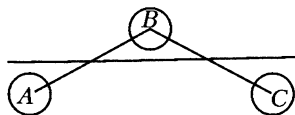


Рис. 16

Пусть X и Y – середины этих сторон AB и BC . Очевидно, если радиус круга не превосходит длины высоты треугольника BXY , т.е. $r \leq \frac{d}{2} \sin \frac{\pi}{n}$, то прямая XY не пересекает круг и, следовательно, отделяет его от всех прочих (круги с вершинами в A и C она не пересекает по соображениям симметрии, а остальные круги – тем более не пересекает).

С другой стороны, пусть $r > \frac{d}{2} \sin \frac{\pi}{n}$. Тогда легко видеть, что любая касательная к кругу с центром в B лежит ближе либо к точке A , либо к точке C , т.е. непременно пересекает хотя бы один круг. Это и значит, что мы нашли соотношение между r и d для случая правильного многоугольника.

Теперь пусть центры кругов расположены произвольным образом; тогда рассмотрим их выпуклую оболочку. Это многоугольник, число вершин которого не больше n , и потому хотя бы один из его углов (опять-таки обозначим его B) будет не меньше, чем $\pi \left(1 - \frac{2}{n}\right)$. Далее мы рассуждаем в точности как выше, и опять-таки убеждаемся в том, что радиус круга должен быть не больше, чем $\frac{d}{2} \sin \frac{\pi}{n}$.

Теперь решим нашу задачу 40. По условию, $d = 10$, $r = 1$. Соответственно, требуется, чтобы выполнялось неравенство $\sin \frac{\pi}{n} \geq \frac{1}{5}$.

Калькулятор (или таблицы) показывают, что $\sin 12^\circ = 0,2079... > 1/5$. Это означает, что при 15 кругах все еще всегда можно отделить один круг, тогда как 16 кругов уже можно расположить так, чтобы они были «неотделимы» – например, если центры кругов расположены, как описано выше.

Соответственно, при 12 кругах прямая, отделяющая один из них, всегда существует, а при 120 кругах она может не существовать.

Теория чисел

41. Решение. Обозначим сумму цифр произвольного числа x через $S(x)$. Пусть a и $a + 1$ — искомые числа. Ясно, что a должно оканчиваться несколькими девятками. Предположим, что $a = \dots 99\dots 99$ (r девяток в конце), тогда $S(a + 1) = S(a) - 9r + 1$, откуда $9r - 1$ должно делиться на 49; $9r = 50, 99, \dots$. Поскольку 50 не делится на 9, ясно, что минимальное подходящее $r = 11$. Итак, a оканчивается на 11 девяток, и так как $S(a)$ делится на 49, то $S(a) \geq 147$. Отсюда $a = 4999989\dots 9$, $a + 1 = 4999990\dots 0$

(11 нулей в конце).

42. Ответ: делится при нечетном n и не делится при четном.

Доказательство. $11A = 11\dots 1$ ($2n$ единиц) $= 1000\dots 01B$. Поэтому дело сводится к выяснению того, делится ли число $10^n + 1$ на 11. Но $10 \equiv (-1) \pmod{11}$, поэтому $10^n + 1 \equiv (-1)^n + 1 \pmod{11}$ делится на 11 при нечетных n . Частное, как нетрудно заметить, равно $9090\dots 9091$.

43. Доказательство. Так как после четвертого вычеркивания остается только одно число, это должно быть число 44. Но сумма исходных одиннадцати чисел делится на 11, следовательно, на первом шаге необходимо вычеркнуть число, делящееся на 11, т.е. число 44. Противоречие.

44. Ответ. $2 \cdot 28 \cdot 37 = 2072$. В этом случае необходимо раздавать членам профсоюза по 37 слонов, а не членам — по 28, при разделе членам профсоюза другого числа слонов число оставшихся слонов не будет делиться на 37.

Решение. Допустим, что число слонов было больше, чем $2 \cdot 28 \cdot 37$. Тогда либо членам, либо не членам профсоюза было роздано больше, чем $28 \cdot 37$ слонов; пусть, например, справедливо первое. Тогда каждому члену профсоюза досталось $k > 37$ слонов, и можно вместо этого раздать каждому из них по $k - 37$ слонов, а лишних $28 \cdot 37$ слонов поровну разделить между 37 не членами. Второй случай аналогичен.

45. Доказательство. Для доказательства пункта а) достаточно воспользоваться тем известным фактом, что если сама дробь получается делением единицы на p , то ее период есть результат деления на p числа $99\dots 9$ (число девяток равно длине периода).

Так как число $99\dots 9$ делится на 9, а p взаимно просто с 9, то сам период (как число) делится на 9. Поэтому (по признаку делимости на 9) делится и сумма его цифр.

Для решения пункта б) обозначим через A число $99\dots 9$ (km девяток), а через B — число $99\dots 9$ с m девятками. Далее нужно воспользоваться двумя фактами: 1) p не делит B (в противном случае длина периода равнялась бы m , а не km), а следовательно, взаимно просто с ним; 2) имеется признак делимости на B , аналогичный признаку делимости на 9: если M — любое число, а N — сумма его m -цифровых граней, то M и N делятся на B одновременно. Теперь ясно, что доказательство б) полностью аналогично доказательству а).

46. Решение. Если $\{32x\} = \{200x\}$, то $\{168x\} = 0$, т.е. $168x$ — целое число. Аналогично и $98x$ — целое. Отсюда мы легко выводим, что $70x$ — целое; $28x$ — целое; $14x$ — целое. (Если известно, что kx — целое, lx — целое, и наибольший общий делитель чисел k и l равен r , то rx тоже целое.) Но тогда и $154x$ — целое, т.е. $\{154x\} = 0$, откуда $\{x\} = \{155x\}$.

47. Решение (И.Н.Бернштейн). а) Процедуру решения удобно иллюстрировать на более низкой степени двойки, например на числе $1024 = 2^{10}$.

Если мы возьмем показатель степени меньше 10, например $2^8 = 256$, то доказывать нечего, так как само это число делится на себя и не имеет нулей. Однако в числе $2^{10} = 1024$ есть ноль; «убьем» его. Для этого добавим к нему то же число, умноженное на 100:

$$\begin{array}{r} + \quad 1024 \\ 102400 \\ \hline 103424 \end{array}$$

Ноль на третьем справа месте исчез, зато возник новый ноль на пятом месте. «Убьем» его тем же способом:

$$\begin{array}{r} + \quad 103424 \\ 10240000 \\ \hline 10343424 \end{array}$$

Аналогичную процедуру можно применить и к числу 2^{1000} ; хотя мы не знаем, на каких местах в нем находятся (и находятся ли) нули, ясно, что мы можем последовательно «убивать» каждый ноль, начиная справа, и тем самым получить число (оно имеет вид $2^{1000} \cdot 101100\dots 01000101$ при какой-то комбинации нулей и единиц), не имеющее нулей на последних n местах справа.

Может показаться, что это ничего особенного не дает: один ноль мы «убиваем», но одновременно получаем другой левее его. Рассмотрение примера с числом 2^{10} показывает, что этот процесс будет продолжаться бесконечно... Однако суть дела в том, что вполне достаточно получить описанным способом число, в последней тысяче цифр которого отсутствуют нули. После этого все остальные цифры можно *просто отбросить*, так как делимость на 2^{1000} от них не зависит.

Замечание. Аналогично решается задача и в случае, когда вместо числа 2^{1000} мы возьмем число 5^{1000} . Ясно также, что число 1000 можно заменить на любое r .

б) Любое число, не оканчивающееся нулем, имеет вид либо $n \cdot 2^r$, либо $n \cdot 5^r$, где n взаимно просто с 10. Оба случая аналогичны, рассмотрим, например, первый.

Мы уже видели, что существует число Q , не имеющее нулей и делящееся на 2^r . Запишем теперь ряд чисел $Q, QQ, QQQ, \dots, QQQ\dots Q, \dots$, каждое из которых – число Q , выписанное несколько раз подряд. По принципу Дирихле два из них имеют одинаковый остаток при делении на n , поэтому их разность делится на n . Но их разность неизбежно имеет вид $QQ\dots Q00\dots 0$. Теперь уже очевидно, что, отбросив в последнем числе нули в конце, мы получим искомое число.

48. Ответ. 302.

Решение. Если $N < 10^k$, $2N \geq 10^k$, то, очевидно, число $2N$ начинается с единицы (а $4N$ – уже нет). Поэтому число единиц в последовательности равно числу переходов из класса k -значных чисел в класс $(k+1)$ -значных. (Например, при переходе от двузначных к трехзначным появляется начинающееся с единицы число 128.)

Это означает, что число единиц равно числу цифр в последнем числе, т.е. в числе 2^{1000} . Так как $\lg 2 = 0,30103\dots$, то $\lg 2^{1000} = 301,03\dots$, т.е. в этом числе 302 цифры.

49. Указания. а) Нужно использовать то, что

$$\sum (x_i - x_{i-1}) + \sum (x_i - x_{i-2}) \geq 1 + 2 + \dots + 29 = 435.$$

б) Существует набор 0, 2, 3, 10, 16, 21, 25, в котором, таким образом, $x_6 = 25$. По-видимому, для $x_6 < 25$ редких наборов не существует.

в) Следует использовать те же соображения, что в п. а), для сумм чисел вида $(x_i - x_{i-1})$, $(x_i - x_{i-2})$, $(x_i - x_{i-3})$ и т.д.

г) Один из возможных ответов: $x_i - x_{i-1} = (n^2 - i + 1)$.

50. Решение. Легко заметить, что при всех k , начиная с $k = 1$, $a_k = b_k + c_k$. Поэтому имеем, начиная с $k = 2$:

$$\{a_k, b_k, c_k\} = \{b_{k-1}, c_{k-1}, b_{k-1} - c_{k-1}\}.$$

Следовательно, зная множество

$$M = \{a_k, b_k, c_k\},$$

мы знаем числа b_{k-1} и c_{k-1} (они принадлежат множеству M), и знаем, что a_{k-1} — сумма каких-то двух из них.

Пусть $a_{10} = x$, $b_{10} = y$, тогда $c_{10} = x - y$ ($x \leq 2y$). Ясно, что максимальные значения a_9 , b_9 и c_9 равны $x + y$, x , y . Рассуждая таким же образом, мы видим, что числа a_8 , b_8 , c_8 не превосходят $(x + y) + x = 2x + y$, $x + y$, x ; числа a_7 , b_7 , c_7 — не превосходят $(2x + y) + (x + y) = 3x + 2y$, $2x + y$, $x + y$ и т.д. На десятом шаге мы увидим, что $a_0 \leq 55x + 34y \leq 89x$.

Но $a_0 = 1$. Отсюда

$$x \geq \frac{1}{89} > \frac{1}{100}.$$

Равенство выполняется, если

$$b_0 = \frac{55}{89}.$$

Замечание. Очевидно, задача связана с числами Фибоначчи

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 \dots$$

Объясните, в чем именно заключается эта связь.

51. Ответ. Нет.

Решение. Если $n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_r$, то сумма делителей n не меньше, чем $n \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_r} \right)$. Но сумма чисел, обратных к первым r простым, может быть сделана сколь угодно большой.

52. Ответ. а) $r = 6$; б) $r = 5$; в) $r = 4$; г) $r = 3$.

Решение. а) Пусть a_1 — наибольшее среди чисел a_1, \dots, a_r . Так как оно равно произведению двух чисел, меньших его, то каждое из этих чисел должно быть больше 1. Тем самым и $a_1 > 1$, и в наборе есть не менее трех чисел, больших 1. По аналогичным причинам должно быть хотя бы три числа, меньших 1. Пример для $r = 6$ строится легко:

$$2, 3, 6, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}.$$

б) Если среди этих чисел нет числа -1 , то, рассуждая как выше, мы увидим, что должно быть три числа с модулем больше 1 и три — с модулем меньше 1, так что $r > 5$. Если же одно из

чисел равно -1 , мы можем подобрать пять чисел, например,

$$-1, -\frac{1}{2}, -2, \frac{1}{2}, 2.$$

Четырех чисел не хватает, так как необходимо, чтобы среди них были еще по меньшей мере два отрицательных числа и два положительных.

в) Здесь можно обойтись четырьмя числами, а именно не равными единице комплексными корнями 5-й степени из 1. Легко убедиться, что каждый из них является произведением двух других. Трех чисел не хватает, так как из равенств $ab = c$, $ac = b$ следует, что $a^2 = 1$.

г) Можно взять три стандартных корня из -1 : числа i, j, k .

53. а) Ответ. $1888\ 888\ 888,7 = 111111111 \cdot \frac{17}{10}.$

Решение. Возьмем какое-нибудь число указанного типа и «циклически изменим» его 10 раз. Ясно, что в сумму на каждом месте войдет 3 единицы и 7 двоек, так что среднее на каждом месте составит $\frac{17}{10}$. Остается заметить, что все числа указанного типа разбиваются в группы по 10.

б) **Указание.** Здесь первой цифрой каждого из чисел обязана быть единица, так что и первая цифра среднего арифметического – единица. На оставшихся местах стоит 2 единицы и 7 нулей, поэтому **ответ:**

$$1\ 000\ 000\ 000 + 111\ 111\ 111 \cdot \frac{2}{9} = 1\ 022\ 222\ 222, (2).$$

54. Указание. «Хорошим» является любое число, оканчивающееся на 1, 3, 7 или 9 (вот 400 чисел). Далее, если число оканчивается на четную цифру (2, 4, 6 или 8), то оно должно делиться на 8, откуда легко сообразить, что таких чисел 100. Если число кончается на 5, то оно должно делиться на 125, и есть четыре таких числа: это 125, 375, 625 и 875. Наконец, число, кончающееся нулем, только одно: 000.

Замечание. Задача легко обобщается на случай k -значных чисел и произвольной степени l , но с оговоркой: l должно быть взаимно просто с 10 и больше или равно k . В таком случае ответ:

$$N = 10^{k-1} \left(4 + \frac{4}{2^{k-1}} \right) + 2^{k-1} + 1.$$

Если же эти условия не выполнены, то задача существенно усложняется.

55. Ответ. а) 110 лет и 11 лет, б) 110 лет и 2 года.

Соответствующие пары лет: в первом случае (2002, 2112) (или, скажем, (2332, 2442)) и (2992, 3003), во втором – та же пара (2002, 2112) и (9999, 10001).

56. а) Из условия задачи следует, что $x^4 = x^{17}/x^{13}$ рационально. Поэтому рационально также и x^{12} . Деля x^{13} на x^{12} , мы видим, что и x рационально. Но степень рационального числа может быть целым числом только в том случае, если оно само целое.

б) Мы будем искать подходящее число x в интервале $[a; b] = [N + 0,2; N + 0,8]$, где N достаточно велико (как будет видно из дальнейшего, можно, например, взять $N = 10^7$). Первое неравенство выполнено автоматически. Для того, чтобы выполнялось третье, рассмотрим все числа R_1, R_2, \dots , лежащие в интервале $[a^3; b^3]$ и имеющие вид $M + 0,0000001$, M – целое число. Любое из них «на две трети годится» на роль куба искомого числа – в том смысле, что выполнены первое и третье неравенства. Остается удовлетворить второе.

Для этого будем перебирать все эти числа последовательно. При переходе от M_i к $M_{i+1} = M_i + 1$ число x^2 (оно равно указанному числу в степени две трети) увеличивается менее чем на $1/1\,000\,000$, при этом чисел достаточно много, так что в какой-то момент происходит «переход через целое». Именно в этот момент мы получаем нужное число.

Решение задачи **г)** полностью аналогично.

в) Пусть $N = [x^3]$, $M = [x^2]$. Тогда

$$\begin{aligned} N^2 - M^3 &= (N^{4/3} + NM^{2/3} + M^2)(N^{2/3} - M) = \\ &= (N^2 + NM^{2/3} + M^{4/3})(N^{1/2} + M^{1/3})(N^{1/2} - M^{1/3}). \end{aligned}$$

Если $x < 5$, то первые два множителя заведомо меньше 100 и 12 соответственно (оценка грубая, но нам и такой хватит). Что же касается последнего множителя, то числа $N^{1/3}$ и $M^{1/2}$ очень близки к x , так что он очень мал (имеет порядок одной миллионной). Следовательно, произведение меньше 1. А так как числа целые, то получается, что $N^2 = M^3$.

Но тогда число $y = N/M$ – целое (см. задачу **а)**) и очень близко к x . Это противоречит условию, согласно которому x отстоит от целого не меньше чем на 0,1.

57. Ответ. Можно.

Решение. Достаточно воспользоваться очевидным тождеством $(a^b)^c = a^{(bc)} = (a^c)^b$, и взять $a = 7$, $b = 7$, $c = 7^7$.

58. Ответ. а) Это возможно, например: $n = 1729 = 1000 + 729 = 1728 + 1 = 7 \cdot 13 \cdot 19$.

б) Это невозможно. В самом деле, $n = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$, причем второй множитель не меньше, чем ab , и следовательно, больше первого. Точно так же $n = (c + d) \cdot (c^2 - cd + d^2)$. Если эти представления различны, то выходит, что $a + b = c^2 - cd + d^2 > c + d = a^2 - ab + b^2 > a + b$. Противоречие.

(Строго говоря, мы упустили случаи, когда $a = 1$ или $a = b = 2$. Но они достаточно очевидны).

59. Есть довольно стандартное доказательство этого методом индукции (главная трудность здесь состоит в том, чтобы правильно сформулировать утверждение индукции).

Мы, однако, предложим другой, более красивый путь.

Представим каждое число от 0 до 999 999 999 в виде суммы «разрядных единиц» (например: $70264 = 70000 + 200 + 60 + 4$). При возведении такой суммы в 8-ю степень мы получаем выражения типа $70000^a \cdot 200^b \cdot 60^c \cdot 4^d$, где $a + b + c + d = 8$.

Теперь разобьем числа A и B на слагаемые, соответственно разложению каждой из восьмых степеней, и приведем подобные члены. Ясно, что получатся выражения примерно такого вида: $N \cdot 70000^a \cdot 200^b \cdot 60^c \cdot 4^d$, где коэффициент N пропорционален количеству 9-значных чисел, в разложение которых на разрядные единицы входят слагаемые 70000, 200, 60 и 4.

Но в разложение числа A входит 100 000 таких чисел (в числе ****7*260 нам известны 4 цифры, а остальные пять произвольны), тогда как в разложение числа B — вдвое меньше.

Остается заметить, что рассуждение, которое мы провели для конкретного члена $N \cdot 70000^a \cdot 200^b \cdot 60^c \cdot 4^d$, годится и для любого другого члена: в разложение B входит ровно половина соответствующих членов.

Остается понять один важный момент: неужели такое рассуждение годится для любых степеней? — Нет, конечно. Для того, чтобы оно было верно, необходима важная оговорка: есть хотя бы один разряд, который вообще не участвует в данном разложении (в нашем примере таких разрядов было 5: 4-й, а также с 6-го по 9-й).

Но для степеней не выше 8 это справедливо! Действительно, поскольку слагаемых в любом девятизначном числе ровно 9 (некоторые из них, возможно, равны нулю, как в этом примере), а степень 0 восьмая, то неизбежно в каждом из членов по отдельности хотя бы одно из девяти слагаемых участвует в

нулевой степени, т.е. фактически вообще не участвует. Это соображение и завершает доказательство.

60. а) Проще всего заметить, что циклически повторяется не только r -я цифра, но весь набор из последних r цифр. В самом деле, поскольку таких наборов конечное число, рано или поздно один из наборов должен повториться. С этого момента дальше все пойдет по циклу, т.е. десятичная дробь окажется периодичной.

б) Рассуждаем от противного. Предположим, что r -я цифра повторяется циклически, и длина периода равна m . Но тогда найдется такое s , что через sm мест повторится как r -я, так и $(r-1)$ -я цифра. Легко видеть, что начиная с этого момента, $(r-1)$ -я цифра будет повторяться с периодом sm . Отсюда, аналогично, выводим, что циклически повторяется $(r-2)$ -я цифра, и т.д., вплоть до первой цифры включительно.

Итак, достаточно рассмотреть случай, когда циклически повторяется первая цифра с некоторым периодом t .

Но тогда мы можем определить, на сколько больше знаков имеет число $2^{(n+t)}$ в сравнении с 2^n . Число $2^{(n+1)}$ имеет на один разряд больше, чем число 2^n , тогда и только тогда, когда его первая цифра равна 1. Таким образом, разность числа знаков равна числу единиц в цикле первых цифр.

Это утверждение верно и в том случае, если мы рассматриваем цикл длины tM (в нем в M раз больше единиц, чем в цикле длины t). Если в цикле длины t имеется q единиц, то в цикле длины $tM - qM$ единиц.

Значит, число $2^{(n+tM)}$ всегда имеет $k + tM$ знаков, каково бы ни было M . Но отсюда легко вывести, что $2^t = 10^q$, что абсурдно.

Алгебра

61. Указание. $Q = (a+b)^3 + (3b)^3$ и поэтому делится на $(a+b) + 3b = a+4b$.

62. Ответ. $105 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} = 15$.

Решение. При первой операции меняется знак у трети всех чисел. Поэтому от всей суммы S остается

$$S_1 = \frac{2}{3} \cdot S + \frac{1}{3} \cdot (-S) = \left(1 - \frac{2}{3}\right)S.$$

При второй операции на -1 умножается пятая доля плюс единиц и пятая доля минус единиц (почему?), следовательно, опять-

таким образом от суммы остается

$$\frac{4}{5} \cdot S_1 + \frac{1}{5} \cdot (-S_1) = \left(1 - \frac{2}{5}\right) \cdot S_1.$$

Убедитесь сами, что при третьей операции сумма умножается на

$$1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}.$$

63. Решение. Легко доказать, что начиная с некоторого места a_r равно 0 или 1. (Можно даже указать, что это верно, например, с 250-й тысячи.) Однако в дальнейшем интервалы между полными квадратами возрастают, и потому в последовательности $\{a_r\}$ возникают все более длинные «куски» из сплошных нулей. Для того чтобы получить кусок длины s , требуется только, чтобы для очередного возводимого в квадрат числа N выполнялось неравенство

$$(N+1)^2 - N^2 > 1000 \cdot (s+1),$$

т.е. $N > 500 \cdot (s+1)$. Поэтому период должен был бы состоять из одних нулей, что невозможно.

64. а) Ответ. Нет.

Решение. Поскольку $7^2 < 50$, а $7,8^2 > 60$, то в промежутке $[50 \cdot 10^{10}; 60 \cdot 10^{10}]$ содержится менее 10^5 (точнее, менее 80 000) квадратов. Поэтому квадратов «не хватает» на 10^5 шестизначных чисел, начинающихся с 5.

б) Ответ. Да.

Решение. В самом деле, пусть a — некоторое шестизначное число, меньшее $\sqrt{2 \cdot 10^{11}}$. Тогда $a < 4,5 \cdot 10^5$, и потому

$$(a+1)^2 - a^2 = 2a+1 < 10^6.$$

Отсюда ясно, что продвигаясь по ряду чисел $a^2, (a+1)^2, (a+2)^2, \dots$ мы не пропустим ни одного шестизначного числа B : это могло бы случиться лишь в том случае, если бы оказалось, что $(a+k)^2 < B \cdot 10^6$, тогда как $(a+k+1)^2 \geq (B+1) \cdot 10^6$.

в) Ответ. Нет.

Решение. Рассуждение из п. а) здесь уже не проходит, так как $\sqrt{30} - \sqrt{20} > 1$. Необходимо воспользоваться тем, что $\sqrt{30} - 5 < 0,5$; отсюда следует, что не все шестизначные числа из промежутка $[5 \cdot 10^4; 30 \cdot 10^4]$ «закрываются» квадратами.

г) Ответ. 251 000.

Решение. Если $a < 500\,000$, то $(a+1)^2 - a^2 < 1\,000\,000$. Отсюда видно, что в ряде чисел $1^2, 2^2, \dots, 500\,000^2$ встречаются все 6-значные «начала». Следовательно, искомое число больше, чем $500^2 = 250\,000$. Рассмотрим теперь число

$$(500\,000 + b)^2 = 25 \cdot 10^{10} + 1\,000\,000b + b^2.$$

Когда b пробегает значения $1, 2, \dots$, второе слагаемое обеспечивает увеличение шестой слева цифры на 1; поэтому весь вопрос в том, когда именно член b^2 приведет к «проскакиванию». Очевидно, это произойдет при $b = 1000$. Тогда имеем:

$$501\,000^2 = 251\,001 \cdot 10^6,$$

откуда видно, что на 1002 шестизначных числа от 250 000 до 251 001 приходится только 1001 «корень» от 500 000 до 501 000, причем

$$500\,999^2 = 250\,999\,998 \dots 001,$$

так что пропускается число 251 000. Допустим теперь, что кроме него было пропущено какое-то другое шестизначное число из промежутка $[250\,000; 251\,000]$. Тогда в этом промежутке пропущено два числа, и на 1000 «корней» приходится 999 квадратов. Из принципа Дирихле следует, что какое-то другое число в ряду квадратов встретится дважды; но этого быть не может, так как начиная с числа 250 000 расстояние между любыми двумя квадратами больше миллиона.

д) **Ответ.** 13 цифр. (Почему двенадцати недостаточно?)

Решите эту задачу сами, приняв во внимание, что

$$3 \cdot 10^5 \leq n < 4 \cdot 10^5$$

и что $N^3 - (N-1)^3 < 3N^2$ для любого N .

65. Решение. а) Невозможно, так как если N – общее кратное чисел d_1, d_2, \dots, d_m , то среди первых N чисел не более $0,9 \cdot N$ членов данных прогрессий.

б) Это возможно. Например: первая прогрессия начинается с единицы и имеет разность 2, т.е. состоит из всех нечетных чисел ($d_1 = 2; \{1, 3, 5, \dots\}$), вторая начинается с 2 и имеет разность 8 ($d_2 = 8; \{2, 10, 18, \dots\}$), третья начинается с 4 и имеет разность 32 и т. д.: k -я прогрессия начинается с первого из пропущенных до сих пор чисел и имеет разность 2^{2k-1} . Легко убедиться, что эти прогрессии не пересекаются; сумма обратных разностей равна

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \dots = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3} < 0,9.$$

В действительности сумму обратных разностей можно сделать сколь угодно малой. (Как?)

66. Указание. Одно неравенство следует из того, что $2^3 = 8 < 3^2 = 9$; другое — из того, что $2^8 = 256 > 243 = 3^5$.

67. Решение. $2^{10} = 1024 > 1000$, откуда следует, что $\lg 2 > 0,3$.

Поскольку $7^2 \cdot 2 = 98 < 100$, то $2 \lg 7 + \lg 2 < 2$. Отсюда получаем, что $\lg 7 < 0,85$.

С другой стороны, $3,4^2 > 10$, т.е. $\lg 3,4 > \frac{1}{2}$. Но $7^3 = 343$, следовательно,

$$3 \lg 7 > 2,5, \quad \lg 7 > 0,83.$$

Отсюда получаем ответ: $\lg 7 \approx 0,84$ (ошибка меньше 0,01). В действительности $\lg 7 \approx 0,8451$.

68. Ответ. Максимум достигается, если эти числа «по возможности» равны между собой. Это значит, что $a_1 = 26$, $a_2 = 27$, ..., $a_{25} = 50$; $a_{26} = 1$, $a_{27} = 2$, ..., $a_{50} = 25$. Тогда каждый модуль равен 25, а вся сумма равна $5 \cdot 50 = 250$.

60. Ответ. $c^2 = a^2 d$.

Указание.

$$\left(x + \frac{k}{x}\right)^2 = x^2 + 2k + \frac{k^2}{x^2},$$

откуда ясно, что после деления исходного уравнения на x^2 первый и последний член выражаются через y^2 . Остается проследить за тем, чтобы величина k для второго и четвертого членов была такой же, как для первого и последнего.

70. Ответ. Нет.

Решение. В самом деле, пусть $P(x) = Q(R(x))$ и y, z — корни Q . Тогда, используя теорему Виета для $Q(x)$, получаем:

$$P(x) = Q(R(x)) = k(R(x) - y)(R(x) - z),$$

откуда видно (используем теорему Виета для $R(x)$), что сумма корней первого и второго множителя одинакова. Таким образом, необходимое условие такого представления состоит в том, что корни $P(x)$ можно разбить на две пары x_1, x_2 и x_3, x_4 так, что

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4.$$

Можно показать, что это условие является и достаточным.

71. Ответ. $a^2 > \frac{8b}{3}$.

Решение. Если $y_1 = Ax + B$ — такая касательная, то функция $y - y_1$ должна иметь два двойных корня. Отсюда легко следует,

что $y - y_1 = (x^2 + px + q)^2$. Числа p и q легко найти, исходя из того, что функция $y - y_1$ совпадает с y в степенях выше первой, а коэффициенты при первой и нулевой степенях x можно сделать произвольными за счет выбора A, B . Прямое вычисление показывает, что

$$p = \frac{a}{2}, \quad q = \frac{b}{2} - \frac{a^2}{8},$$

и тогда функция

$$y_1 = y - (x^2 + px + q)^2$$

линейна и задает искомую касательную. Остается, однако, вопрос: действительно ли она касается кривой y ? Это зависит от того, будут ли корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ вещественными или мнимыми, т.е. от знака дискриминанта. Условие, указанное в ответе, и означает, что $D > 0$.

При $D = 0$ касательная прямая имеет две сливающиеся точки касания (т.е. одну точку касания 3-го порядка), а при $D < 0$ — две мнимые точки касания. Например, если $y = x^4 + x^2 + 1$, то прямая $y_1 = \frac{3}{4}$ имеет с графиком две мнимые точки касания; на графике они не видны, прямая лежит ниже графика.

72. Ответ. $x_k = \frac{(-1)^{k-1}}{(n-1)!} C_{n-1}^k.$

Решение. Решение этой системы связано с разложением дроби

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{(y+1)(y+2)\dots(y+n)}$$

на простейшие. Именно, пусть эта дробь равна сумме

$$\frac{x_1}{y+1} + \frac{x_2}{y+2} + \dots + \frac{x_n}{y+n},$$

тогда левые части уравнений — не что иное, как значения суммы при $y = 0, 1, 2, \dots, n-1$, а правые части — значения самой дроби. Теперь утверждения б) и в) непосредственно следуют из симметрии задачи относительно замены y на $n+1-y$. Пункт а) решается стандартным образом — приведением равенства $\frac{1}{Q} = \frac{x_1}{y+1} + \dots$ к общему знаменателю, отбрасыванием знаменателя и подстановкой корней.

73. Указание. Решение этой задачи сходно с предыдущей. А именно, рассмотрим систему линейных уравнений, k -е уравне-

ние которой имеет вид

$$\frac{x_1}{b_k - c_1} + \frac{x_2}{b_k - c_2} + \dots + \frac{x_n}{b_k - c_n} = 0.$$

(В правой части стоит 0 для всех уравнений, кроме n -го; если же $k = n$, то в правой части должна стоять единица.)

Тогда, во-первых, решение системы $\{x_1, \dots, x_n\}$ представляет собой последний столбец обратной матрицы (для нахождения других столбцов нужно рассмотреть в правой части единицу не на n -м, а на другом месте), а во-вторых, из формулы Крамера немедленно следует, что x_n есть частное двух определителей $\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}$, где Δ_n — определитель данной матрицы, а Δ_{n-1} — такой же определитель, но $(n-1)$ -го порядка. Это позволяет найти определитель системы по индукции.

Для нахождения x_1, \dots, x_n нужно, как выше, рассмотреть разложение на простейшие рациональной дроби

$$\frac{P(x)}{(x+b_1)\dots(x+b_n)} = \frac{x_1}{x+b_1} + \dots + \frac{x_n}{x+b_n},$$

где $P(-c_1) = \dots = P(-c_n) = 0$. Учитывая последнее уравнение, мы видим, что

$$P(x) = (x+c_1)\dots(x+c_{n-1}) \cdot \frac{(b_1-c_n)\dots(b_n-c_n)}{(c_1-c_n)\dots(c_{n-1}-c_n)},$$

откуда

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{P(-b_n)}{(b_1-b_n)\dots(b_{n-1}-b_n)} = \\ &= \frac{[(c_1-b_n)\dots(c_{n-1}-b_n)] \cdot [(b_1-c_n)\dots(b_n-c_n)]}{(b_1-b_n)\dots(b_{n-1}-b_n)(c_1-c_n)\dots(c_{n-1}-c_n)}. \end{aligned}$$

Остальные x_k находятся аналогично.

74. Ответ. Если $k < n-1$, то $D = 0$. Легко убедиться, что строки линейно зависимы.

При $k = n-1$ получаем $D = (-1)^{n(n-1)/2} ((n-1)!)^n$.

75. Ответ. Предел равен $\sin 1$.

76. Решение 1. Вычет левой части в точке z , очевидно, равен z . Вычет правой части равен n , деленному на производную знаменателя, т.е. $\frac{n}{nx^{n-1}}$ при $x = z$. Но тогда $x^{n-1} = z^{n-1} = \frac{1}{z}$. Поэтому вычеты совпадают и разность левой и правой части имеет только устранимые особенности, т.е. является константой.

Чтобы убедиться в том, что эта константа равна 0, достаточно, например, подставить в обе части равенства $x = 0$.

Решение 2. Обозначим левую часть равенства через $f(x)$, правую часть равенства – через $g(x)$. Приведем сумму $f(x)$ к общему знаменателю; ясно, что она примет вид

$$f(x) = \frac{P(x)}{x^n - 1},$$

где $P(x)$ – многочлен степени не выше $n - 1$.

Заметим далее, что левая часть (как и правая) не меняется при замене переменной x на ζx , где ζ – любой корень n -й степени из 1. Но тогда и $P(x)$ не меняется при такой замене (поскольку не меняется знаменатель $x^n - 1$). Однако таким свойством обладают лишь многочлены вида $P(x) = Q(x^n)$. Учитывая степень $P(x)$, мы видим, что $P(x) = C$. Найти константу можно так же, как и в первом решении.

Решение 3 (А.В.Князюк). Пусть $P(x) = (x - a) \dots (x - d)$ – любой многочлен. Тогда по формуле логарифмической производной

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{1}{x - a} + \dots + \frac{1}{x - d}.$$

Следовательно,

$$\frac{xP'(x)}{P(x)} = \frac{x}{x - a} + \dots + \frac{x}{x - d};$$

с другой стороны,

$$\frac{nP}{P} = n = 1 + 1 + \dots + 1 = \frac{x - a}{x - a} + \dots + \frac{x - d}{x - d}.$$

Вычитая эти равенства одно из другого, мы получаем для любого многочлена:

$$\sum \frac{\xi}{x - \xi} = \frac{xP' - nP}{P},$$

где ξ пробегает все корни многочлена P . Условие данной задачи есть частный случай получившейся формулы для $P(x) = x^n - 1$.

77. Решение. Начнем с задачи б). Ясно, что в каждый момент можно делать один и только один из двух возможных ходов (либо вправо, либо влево), т.е. игра действительно может продолжаться неограниченно, но ее ход полностью предопределен начальным положением фишки. Ясно, что рано или поздно фишка окажется на поле, где она уже была. Сколько ходов пройдет между двумя ее попаданиями на это поле? Если считать, что между этими попаданиями было сделано x ходов вправо и y

ходов влево, то (x, y) – решение уравнения $100x - 47y = 0$ в натуральных числах. Но наименьшее такое решение есть $x = 47$, $y = 100$, так что для возврата на старое место нельзя обойтись менее чем 147 ходами. Следовательно, за первые 147 ходов фишка обойдет все поля по одному разу, а на 148-м она может попасть только на исходное поле (иначе оказалось бы, что она дважды попала на одно поле с интервалом менее 147 ходов).

Перейдем к задаче а). Поскольку числа 300 и 198 имеют общий делитель 6, количество снятых долларов кратно 6 и не может быть больше 498. Для того чтобы доказать, что можно снять 498 долларов, отметим аналогию задач а) и б). В том и другом случае в любой момент есть возможность делать только один ход из двух возможных (единственное исключение составляет случай, когда на счету лежит 302 доллара, но если такое положение создалось, то сняв 300, мы решим задачу; в остальных случаях если можно снять 300 долларов, то на счету имеется не менее 308 долларов, и у меня нет 198 долларов, чтобы их положить; соответственно, если фишку можно сдвинуть вправо, то ее невозможно двигать влево). Таким образом, если сделать $(498 : 6 + 1 = 84)$ операции, то на счету возникнет каждое из 84 возможных положений, в том числе и 2 доллара.

78. Решение. Если

$$a_1 + \dots + \dots + a_{2n} = 0, \text{ то } k = 2n.$$

Пусть теперь эта сумма отлична от нуля; заметим, что она четна.

Поэтому $\frac{a_1 + \dots + \dots + a_{2n}}{2} = r$ – целое число. Сумма $a_1 + \dots + a_k$ увеличением k на единицу меняется на 1, причем при $k = 0$ она равна 0, а при $k = 2n$ она равна $2r$. Поэтому на некотором шаге она будет равна r . Тогда и сумма оставшихся чисел будет равна r , что и требуется.

79. Ответ. Нет, не может (в обоих случаях).

Решение. а) Пусть $(n + 1)$ – число участников, S_k – сумма очков k -го участника и A_k – число, указанное в условии. Докажем, что

$$A = \sum A_k \leq 0.$$

Пусть a_k и b_k – число выигранных и проигранных k -м участников партий соответственно, тогда

$$S_k = \frac{n + a_k - b_k}{2}.$$

Это число входит в общую сумму A несколько, а именно b_k , раз со знаком плюс и несколько, а именно a_k , раз – со знаком минус.

Разбивая S_k на два слагаемых – постоянное $\frac{n}{2}$ и переменное $\frac{(a_k - b_k)}{2}$, мы видим, что

$$A = \frac{n}{2} \cdot \sum (b_k - a_k) + \sum \frac{(a_k - b_k)(b_k - a_k)}{2}.$$

Первое слагаемое равно нулю в силу того, что на каждый выигрыш одного из участников приходится проигрыш другого, т.е. $\sum a_k = \sum b_k$, а второе очевидным образом неположительно (оно может равняться нулю в том и только в том случае, когда каждый из участников проиграл и выиграл одинаковое число партий, т.е. набрал ровно половину возможных очков).

б) Рассмотрим сумму $\sum S_k \cdot A_k$. Поскольку A_k состоит из слагаемых S_r , которые идут со знаками плюс и минус, то и вся сумма состоит из слагаемых $\pm S_k S_r$. Если k -й игрок выиграл у r -го, то такое слагаемое входит в общую сумму дважды – со знаком плюс в $S_k A_k$ и со знаком минус в $S_r A_r$. Если же они сыграли вничью, то такое слагаемое не входит в сумму вовсе. Так или иначе, все слагаемые взаимно уничтожаются и сумма равна нулю.

Поскольку все S_k положительны, это означает, что среди A_k имеются как положительные, так и отрицательные. Заметим, кстати, что это решение проходит и в случае задачи а).

80. Решение. Для доказательства первой формулы надо многократно итерировать следующие два соотношения:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \quad (1)$$

и

$$\sum \frac{1}{n^2} = \sum \frac{n+1}{n^2(n+1)} = \sum \frac{1}{n(n+1)} + \sum \frac{1}{n^2(n+1)}, \quad (2)$$

причем первый ряд в формуле (2) суммируется в конечном виде.

Применяя сначала первую, а затем вторую формулу непосредственно к левой части, мы получаем:

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_2^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + \sum_2^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)} = 1 + \frac{1}{2} + \sum_2^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)}, \quad (3)$$

первые два члена дают $3/2$, т.е. как раз первый член правой части. Для получения второго слагаемого нужно повторить процедуру, т.е. из ряда, оставшегося в правой части (2), опять выделить первый член (он равен $1/2$), а в оставшемся выраже-

нии домножить числитель и знаменатель на $n + 2$. В результате полученное выражение опять-таки разбивается на два слагаемых, из которых одно суммируется в конечном виде; получившиеся два конечных члена относятся как $1 : 2$ и в сумме дают нужное второе слагаемое и т.д. Многократно итерируя этот процесс, мы и получим первую формулу.

Вторая формула доказывается точно тем же способом, с той лишь разницей, что если в первом случае числитель и знаменатель нужно последовательно домножать на $n + 1$, $n + 2$ и т.д., то во втором случае домножать нужно на $n^2 - 1$, $n^2 - 4$, $n^2 - 9$ и т.д.

81. Ответ: $1/6$, $1/3$, $1/2$.

Доказательство. Пусть сначала в прогрессии $2k + 1$ членов, тогда среднее значение равно среднему члену и равно $1/(2k + 1)$. Наименьший член больше 0, следовательно, наибольший меньше, чем $2/(2k + 1)$, соответственно, не больше чем $1/(k + 1)$. В прогрессии имеется k членов, которые больше среднего, поэтому ее членами являются все числа $1/(2k + 1)$, $1/2k$, $1/(2k - 1)$, ..., $1/(k + 1)$. Но эти числа образуют прогрессию только в том случае, если их не более 2. Следовательно, $k = 1$.

Случай четного числа членов разбирается аналогично, и в этом случае решений нет.

82. Очевидно, если все площади больше нуля (в противном случае доказывать нечего), на каждой из 29 горизонталей должно быть по одному узлу, и все эти узлы стоят также на разных вертикалях. Таким образом, если нумеровать узлы по горизонталям, получается перестановка чисел $\{1, \dots, 29\}$. Соответственно, задача может быть переформулирована следующим образом:

Числа 1, 2, ..., 29 переставлены произвольным образом, так, что число k стоит на месте с номером a_k .

а) Докажите, что существуют такие k , r , что модуль произведения $M_{kr} = (k - r)(a_k - a_r)$ меньше 13.

б) Верно ли, что существуют такие k , r , что модуль произведения M_{kr} меньше 10?

Далее мы решаем именно эту задачу.

Решение. а) Назовем «соседями» a числа $a - 1$ и $a + 1$. Очевидно, каждое число имеет двух соседей, кроме 1 и 29, у которых только по одному соседу.

Допустим, что утверждение а) неверно, и рассмотрим числа, стоящие на местах с номерами от 12 до 18. Если разность каких-то двух из них равна 1 или 2, то $M_{kr} \leq 12$. Отсюда следует, что эти семь чисел не могут быть соседними или даже иметь общих

соседей. Следовательно, у них не менее 12 различных соседей (было бы 14, но, возможно, два из них – числа 1 и 29, которые имеют только по одному соседу).

Хотя бы один из соседей попадает в интервал от 6 до 24 (вне этого интервала лежит только 10 чисел: 1 – 5 и 25 – 29), и этот сосед вместе с исходным числом дает нужную пару, поскольку разность самих чисел равна 1, а разность мест не более 12.

6) Нет, неверно. Вот пример.

Пусть $a_k = 12k \pmod{29}$, т.е. $a_1 = 12$, $a_2 = 24$, $a_3 = 36 - 29 = 7$, и т.д. Докажем, что все M_{kr} не меньше 12.

Допустим противное. Тогда в формуле для M_{kr} по крайней мере один из сомножителей меньше четырех. Пусть сначала это первый сомножитель; обозначим его R . Тогда второй сомножитель (обозначим его S) либо в 12 раз больше R (в этом случае очевидно, что произведение не меньше 12), либо отличается от $12R$ на число, кратное 29. Учитывая, что нас интересует не само число, а его модуль, можно сказать, что второй множитель всегда равен либо $12R$, либо $\pm 29 \pm 12R$, либо, наконец, $\pm 58 \pm 12R$. Конкретно получаем:

- Если $R = 1$, то S может принимать только значения 12, 17.
- Если $R = 2$, то S принимает значения 24, 5. В последнем случае $M_{kr} = 10$, откуда и видно, что данный метод позволяет получить оценку 10, но не лучше.
- Если $R = 3$, то S принимает значения 7, 22.

Остается рассмотреть случай, когда меньше четырех не первый, а второй сомножитель S . В этом случае достаточно воспользоваться тем фактом, что $12^2 = 144 = 5 \cdot 29 - 1$, откуда следует, что $R = -12S \pmod{29}$, и надо просто повторить уже приведенное рассуждение.

83. Доказательство надо, конечно, проводить по индукции. Вопрос в том, какое именно утверждение надо положить в основу индукции. Оказывается, надо доказывать *индукцией по n* следующее утверждение: *для любых $n, m > 0$ m -я производная функции $f_n(x)$ монотонна и всюду сохраняет знак.*

Первый шаг доказательства: проверяем его «в лоб» для $n = 0$ и для всех m .

Действительно, все производные имеют вид $f_0^{(m)}(x) = A_m x^{\frac{1}{2}-m}$, и эти функции попеременно то возрастают, то убывают, в зависимости от знака коэффициента A_m .

Остается доказать, что если наше утверждение справедливо для данного n и для всех m одновременно, то оно верно для $n + 1$ (и для всех m). Это уже несложно: сохранение знака очередных функций легко вытекает из монотонности предыду-

щих, а их монотонность – из сохранения знака производной. Сверх того, надо еще проверить, что $f_{2010}(x)$ возрастает, а не убывает; убедитесь в этом сами.

84. Очевидно, при произвольном n имеется решение $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ – положительный корень уравнения $x^2 + x = 0,9$.

Мы утверждаем, что при нечетном n других решений нет, а при четном n есть еще две серии решений, для которых $x_1 = x_3 = \dots = x_{n-1}$, $x_2 = x_4 = \dots = x_n$, $x_1 + x_2 = 1$. При этом x_1 является одним из двух корней уравнения $x + (1 - x)^2 = 0,9$.

Для доказательства сравним x_k с x_{k+2} . Пусть, например, $k = 1$ (соответственно, $k + 2 = 3$) и $x_1 > x_3$. Тогда из равенства $x_1^2 + x_2 = x_3^2 + x_4$ следует, что $x_2 < x_4$. Но из этого аналогичным образом следует, что $x_3 > x_5$, и т.д.

Естественно, случай $x_1 < x_3$ совершенно аналогичен.

В итоге, в зависимости от того, как соотносятся x_1 и x_3 , мы получаем одну из трех цепей неравенств (равенств): либо

$$x_1 > x_3 > x_5 > x_7 > \dots,$$

либо

$$x_1 < x_3 < x_5 < x_7 < \dots,$$

либо, наконец,

$$x_1 = x_3 = x_5 = x_7 = \dots$$

Поскольку уравнения идут по кругу, эта цепь замкнется, и в первом и втором случаях получается противоречие: $x_1 > x_1$.

Таким образом, $x_k = x_{k+2}$ для всех k . Остальное очевидно.

85. Ответ. а) 995. б) –997.

Доказательство. Приведем для начала примеры, когда эти суммы таковы.

Чтобы получить число 995, можно расставить минус единицы на местах с номерами: 1 и 2; 11 и 12; 21 и 22; ...; 991 и 992. При этом получится только две минус единицы (там, где минус единицы на 991 и 992 местах «цепляются» за минус единицы на 1 и 2 местах), во все остальные произведения входит ровно две минус единицы, так что произведение равно +1.

Чтобы получить число (–997), надо расставить минус единицы на местах 1, 11, 21..., 991.

Теперь докажем, что в любую сумму входит не менее двух минус единиц и не менее одной плюс единицы.

Если мы перемножим все получившиеся произведения, то каждое число войдет в него в 10-й степени, так что произведение равно +1.

Следовательно, среди полученных произведений четное число минус единиц, и соответственно, нечетное число плюс единиц. Таким образом, есть по меньшей мере одна плюс единица, и минимальная сумма равна $998 \cdot (-1) + (+1) = -997$.

Докажем теперь, что все произведения не могут равняться плюс единице. В самом деле, два соседних произведения $x_k \cdot x_{k+1} \cdot x_{k+2} \dots x_{k+9}$ и $x_{k+1} \cdot x_{k+2} \dots x_{k+10}$ равны между собой тогда и только тогда, когда $x_k = x_{k+10}$. Но если это выполняется для всех k , то легко убедиться, что все наши числа должны быть равны между собой, а это противоречит условию.

86. Решение. Если прошло более 13 лет, то каждого из олигархов уже экспроприировали, и поэтому распределение денег будет таким: у самого бедного (экспроприированного в нынешнем году) 0 миллионов, у второго (экспроприированного год назад) 1 миллион, у следующего 2 и т.д. – всего $0 + 1 + 2 + \dots + 12 = 78$ миллионов.

Допустим теперь, что прошло k лет, $k < 13$, тогда имеется k экспроприированных олигархов, у которых имеется $0 + 1 + \dots + (k-1) = k(k-1)/2$ миллионов. Кроме того, есть $(13-k)$ тех, до кого еще не дошли руки. У них денег $N + (13-k) \cdot k$, где N – количество денег, которое было у них изначально.

Поскольку вначале эти олигархи были самыми бедными,

$$N \leq \frac{31 \cdot (13 - k)}{13}. \quad (*)$$

Максимум достигается, если, во-первых, неравенство $(*)$ является «почти равенством» (т.е. поначалу у всех олигархов было практически поровну), и во-вторых, при подходящем k .

Найти нужное k проще всего так: уже доказано, что поначалу все должны были иметь поровну, т.е. по $31/13 = 2, \dots$. Обозначим это число r (миллионов).

Тогда в k -й год олигархи получают суммарно 12 миллионов, а теряют $r + (k-1)$. Поскольку $2 < r < 3$, отсюда сразу видно, что в первые 10 лет их суммарный капитал прибывает, а на 11-й начинает убывать; максимум достигается после 10 лет кампаний. В этот момент трое олигархов еще не раскулачены; они имеют $30 + 3r$ миллионов, а остальные – $0 + 1 + \dots + 9 = 45$ миллионов. Итого $75 + 3r = 75 + 93/13 = 82 + 2/13 = 82$ миллиона 154 тысячи (с ошибкой менее 1000). Это и есть ответ.

87. Решение. Заметим прежде всего, что если в условии заменить строгие неравенства на нестрогие, то задача становится неверной, причем имеется *два* контрпримера:

а) $x_1 = 100$, $x_2 = x_3 = \dots = x_{100} = 0$;

б) $x_1 = x_2 = \dots = x_9 = 100/3$, $x_{10} = \dots = x_{100} = 0$.

Наличие не одного, а двух (притом принципиально разных) контрпримеров показывает, что задача трудная. Но оно же, как мы увидим ниже, позволяет изящно завершить решение.

Перейдем к решению. Без ограничения общности можно считать, что

$$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_{100},$$

и, таким образом, нам требуется доказать, что $x_1 + x_2 + x_3 > 100$.

Поскольку заведомо $10\,000 < x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{100}^2 \leq x_1 \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_{100})$, и второй сомножитель меньше 300, то $x_1 > 100/3$.

Предположим, что наше утверждение неверно, т.е. $x_1 + x_2 + x_3 \leq 100$, и применим известный прием «усиления неравенства». А именно, мы утверждаем, что можно без ограничения общности считать, что $x_2 = x_3$.

В самом деле, если $x_2 - x_3 = a > 0$, то мы можем заменить наши числа на такие:

$$x_1 + a, x_2 - a = x_3, x_3, x_4, \dots, x_{100},$$

причем при такой замене левая часть первого неравенства из условия, как легко видеть, увеличивается, а вторая остается неизменной. Таким образом, оба неравенства остаются в силе, и по-прежнему $x_1 + x_2 + x_3 \leq 100$.

Далее, мы можем считать также, что $x_1 + x_2 + x_3 = 100$ (в противном случае опять-таки можно заменить числа $x_2 = x_3$ на большие, уменьшив при этом какие-то из оставшихся чисел x_4, \dots, x_{100}). При этом произойдет то же самое: левая часть первого неравенства из условия увеличивается, вторая остается неизменной, и оба неравенства остаются в силе.

Итак, если условие неверно, то существуют такие числа x_1, \dots, x_{100} , что $x_2 = x_3 = (100 - x_1)/2$, и неравенства справедливы.

Но это уже нетрудно опровергнуть. В самом деле, в таком случае

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{100}^2 &\leq x_1^2 + x_2 \cdot (x_2 + \dots + x_{100}) \leq \\ &\leq x_1^2 + [(100 - x_1)/2] \cdot (300 - x_1), \end{aligned}$$

откуда

$$x_1^2 + [(100 - x_1)/2] \cdot (300 - x_1) > 10\,000.$$

Последнее условие является квадратичным неравенством отно-

сительно x_1 . Можно было бы прямым вычислением проверить, что оно не может выполняться, но проще сослаться на соображения, высказанные вначале. А именно, мы видели, что это неравенство обращается в равенство при $x_1 = 100$ и при $x_1 = 100/3$. Достаточно бросить беглый взгляд на график параболы, чтобы увидеть, что на интервале между этими точками оно неверно, а это и требуется.

Взвешивания

88. Решение. а) Для простоты рассуждений завхоз добавляет одну пустую банку (весом 0) и включает ее в список.

Первое взвешивание организуется так: на одну чашку он кладет 27 самых тяжелых банок (он знает, какие банки нужно взять), а на другую – 27 самых легких. Получается разность, наибольшая из всех возможных. Остальные члены турпохода должны признать, что разбиение на 3 группы (27 самых тяжелых, 27 самых легких и 27 остальных) произведено правильно. Завхоз помечает банки буквами «т» (тяжелые), «л» (легкие) и «с» (средние).

Второе взвешивание: на одну чашку кладутся 9 самых тяжелых банок из числа 27, помеченных буквой «т», 9 самых тяжелых из группы «с» и 9 самых тяжелых из группы «л». На другую чашку – аналогично три самые легкие девятки из трех групп, возникших при первом взвешивании. Опять получается максимальная разность из всех, которые могут получиться, если брать девятки из этих трех групп. Остальные туристы опять должны признать, что выделение тяжелых и легких групп проведено правильно. Завхоз помечает девятки второй буквой «т», «л» или «с», так что получается 9 групп по 9 банок в каждой, которые помечены парами букв «тт», «тс» и т. д.

Третье взвешивание: кладем на первую чашку по три самых легких банки из каждой группы, а на вторую – по три самых тяжелых; аналогично помечаем банки третьей буквой, и в результате все банки будут разбиты на 27 групп. Четвертым взвешиванием мы кладем на одну чашку по самой легкой банке из каждой группы, а на вторую – по самой тяжелой. И на этот раз ясно, что разность весов будет максимальна по сравнению с любой другой комбинацией, при которой на каждую из чашек кладется по одной банке из каждой группы. Тем самым завхоз доказал, что веса банок именно таковы, как он утверждал.

Замечание. Допустим, что вместо буквы «л» мы будем писать 0, вместо «с» – единицу и вместо «т» – двойку. Тогда на банке

будет написано четырехзначное число; проверьте, что оно есть просто-напросто троичная запись номера банки (считая по увеличению весов) без единицы. (Почему?)

Легко убедиться, что при наличии N банок потребовалось бы $\log_3 N$ взвешиваний (с округлением до целого в сторону увеличения).

б) Предположим, что проделано только 3 взвешивания; при каждом взвешивании банка попадает либо на левую, либо на правую чашку, либо остается в стороне. В зависимости от этого пометим каждую банку одной из букв «т», «л» или «с» (последнее означает, что банка не взвешивалась). Аналогично напомним по букве после второго и третьего взвешиваний. Наборов из букв всего 27, а банок – 80. Значит, найдутся две банки с одинаковой маркировкой. Это означает, что при каждом взвешивании эти банки попадали на одну и ту же чашку (или одновременно откладывались в сторону); поэтому невозможно, основываясь на результатах только трех взвешиваний, различить их.

89. Решение. Предположим, что плечи относятся как 1 : 2. Положим на одну чашку три монеты, на другую шесть.

Если весы в равновесии, то эти девять монет настоящие, а фальшивая – одна из четырех оставшихся. Кладем на одну чашку весов две настоящие монеты, а на другую – три подозрительные и одну настоящую. Если равновесие не нарушено, то фальшивая монета – последняя (и при желании можно третьим взвешиванием выяснить, легче она или тяжелее); если же равновесие нарушилось, то фальшивая – одна из этих трех (причем известно, легче она или тяжелее). Тогда третьим взвешиванием кладем две из них на разные чашки, дополнив одну из чашек еще одной, настоящей монетой. Этого достаточно, чтобы определить фальшивую.

Теперь допустим, что при первом взвешивании равновесие нарушено и что перевесила, например, чашка с тремя монетами. Тогда четыре оставшихся монеты – настоящие, а фальшивая – либо одна из трех (тяжелее других), либо одна из шести (легче). Вторым взвешиванием мы можем разложить эти шесть «подозрительно легких» монет на две кучки по три в каждой (и дополнить одну чашку тремя настоящими монетами); это позволит определить, находится ли фальшивая монета на одной чашке, на другой, или она среди трех «подозрительно тяжелых». Третье взвешивание находится без труда.

90. Решение. а) Заметим прежде всего, что для пяти гирь достаточно восьми взвешиваний.

В самом деле, за три взвешивания можно расположить 3 гири в порядке их весов. Для того чтобы определить место четвертой гири среди них, достаточно двух взвешиваний (сначала надо ее сравнить со средней по весу); итак, за 5 взвешиваний удалось расположить 4 гири в порядке весов. Место пятой легко определить за 3 взвешивания.

Этот метод годится для любого числа гирь и позволяет расставить n гирь по весу за $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$ взвешиваний, где a_k равно $\log_2(k+1)$, округленному до ближайшего целого сверху: $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = a_4 = 2$ и т.д. Оценка сверху, очевидно, равна $\log_2(n!)$, также округленному в большую сторону.

Однако для пяти гирь найденное решение не оптимально: можно обойтись семью взвешиваниями. Для этого надо действовать следующим образом.

Обозначим гири A, B, C, D, E . Взвесим сначала две разные пары гирь, и пусть $A > B$, $C > D$. Взвесим теперь A и C ; очевидно, они равноправны, поэтому пусть $A > C$. Нетрудно заметить, что в каждом случае мы делили $5! = 120$ вариантов расположения гирь по весам пополам, так что теперь осталось 15 возможностей.

Сравним теперь гири C и E . Имеется две возможности:

1) $C > E$; допустимо 8 вариантов порядка: $ABCDE$; $ABCED$; $ACBDE$; $ACBED$; $ACEBD$; $ACDBE$; $ACDEB$; $ACEDB$.

Тогда установлено, что A – самая тяжелая, а гири D и E оказались равноправны; сравниваем их. Допустим, что $D > E$; тогда осталось найти гире B место между C, D, E , и это легко сделать за два взвешивания.

2) $E > C$; возможны 7 вариантов порядка: $ABECD$; $AEBCD$; $AECBD$; $AECDB$; $EABCD$; $EACBD$; $EACDB$.

Следующим взвешиванием сравним гири A и E . Если A тяжелее, то остается найти место гире B между гирями E, C, D , если же тяжелее гиря E , то у нас остается 2 взвешивания, чтобы выбрать один правильный вариант из трех. В том и другом случае решение очевидно.

Стоит отметить, что это решение единственно (по крайней мере на первых четырех ходах). В самом деле, если мы, например, на втором ходу пустим в ход одну из уже взвешенных гирь, то легко убедиться, что в зависимости от результата у нас останется либо 20, либо 40 вариантов (либо $A > B > C$, либо $A > B$ и $A > C$). Во втором случае задача, очевидно, не решается за 5 взвешиваний. Точно та же ситуация возникает на третьем и четвертом ходах.

91. Ответ. Не обязательно. Если веса гирь – все четные числа от 2 до 100, то он прав. В самом деле, тогда сумма весов, как

легко сообразить, имеет вид $4k + 2$, следовательно, весы были бы в равновесии только если бы на каждой чашке были гири суммарным весом $2k + 1$, а это невозможно.

Дополнительный вопрос. Верно ли, что этот пример – единственный? Иными словами, верно ли такое утверждение: если имеется 50 гирь, весом от 1 до 100, которые нельзя разложить на две чашки весов – то вес каждой из гирь определен однозначно, и равен 2, 4, 6, ... 100 ?

Игры

92. Ответ. Нет.

Решение. Бегая только по диагоналям, мышка находится в опасности только в те моменты, когда она прибегает в одну из вершин; но перед этим она обязательно пробегает центр. Чтобы избежать лап кошки, ей нужно только правильно выбрать, в какую вершину бежать. Дело в том, что за время, которое ей нужно, чтобы добежать из центра до вершины ($t = 2,5$), кошка пробегает путь, равный 25; легко убедиться, что из исходного положения (какого угодно) она может, пройдя путь $S = 25$, попасть, самое большее, в 2 вершины прямоугольника, лежащие на одной из длинных сторон, тогда как две другие безопасны.

93. Решение. Начинаящий выиграет, если съест кучку в 33 конфеты, а вторую разделит на кучи в 17 и 18 конфет. В дальнейшем он должен играть так, чтобы все время оставлять противнику кучи с числом конфет $5k + 2$ или $5k + 3$ (проверьте, что он может этого добиться). Таким образом, его партнер в конце концов должен будет делить кучку в 2 или 3 конфеты – и проигрывает.

94. Решение. Наиболее естественные стратегии (их иногда называют «жадными» стратегиями) здесь являются и наилучшими. Именно, на первом шаге первый мудрец должен вычеркнуть 512 чисел с одного из концов; либо от 513 до 1024, либо от 0 до 511. Тем самым его проигрыш будет не больше 512. На втором шаге он должен опять вычеркнуть числа с одного из концов оставшейся последовательности – либо 128 наибольших, либо 128 наименьших и т. д. Эта стратегия гарантирует, что ему придется платить не больше 32, как бы ни играл второй. С другой стороны, второй мудрец может обеспечить себе выигрыш не меньше 32 при следующей стратегии: на первом ходу вычеркнуть из оставшихся чисел каждое второе (тем самым он обеспечивает себе выигрыш не меньше 2) и т. д. Детали мы оставляем читателю; заметим только, что число 32 (которое

может гарантировать себе каждый из игроков, но только «с разных сторон») называется «ценой игры».

95. Решение. Ошибкой со стороны Пети было бы взять самое большое яблоко; в этом случае Васа успевает быстро съесть два маленьких и приняться за третье; Пете достанется только 600 г.

Оптимальное решение для Пети: начать с маленького яблока в 250 г, тогда если Васа возьмется за самое большое, то Пете достанутся $250 + 300 + 400 = 950$ г, а если нет – Петя получит, во всяком случае, $250 + 600 = 850$ г.

Оптимальная стратегия для Васи, таким образом, – также не брать самое большое яблоко, а взять любое из двух других: 300 г или 400 г.

96. Ответ. Сможет, если будет постоянно делать ходы параллельно диагонали первого квадрата.

97. Ответ. Первый может обеспечить себе 499 очков, второй – 501.

Решение. Будем говорить, что один набор из k карт «не меньше» другого, если каждой карте первого можно сопоставить карту второго, которая не меньше. Будем говорить, что один набор из k карточек «строго больше» другого, если каждой карточке первого можно сопоставить карточку второго, которая строго больше.

Заметим, что если в некоторый момент игры набор карточек заменить на «не меньший», то при правильной игре можно сыграть не хуже, чем имея первоначальный (т.е. можно набрать не меньше очков).

Тогда верно следующее утверждение: если карточку соперника бить наименьшей из карточек, которыми ее можно побить, либо сбрасывать самую маленькую карточку, то при правильной игре можно получить не меньше очков, чем при любом другом ходе (так как набор карточек, который получается при этом варианте хода, «не меньше»). Поэтому можно считать, что оба игрока ходят именно так.

Докажем сначала утверждение про второго игрока. Набор его карточек без наименьшей карточки «строго больше», чем набор карточек соперника. Теперь, пусть после k -го хода это свойство верно, тогда если он будет ходить каждый раз наименьшей карточкой, то второй отобьется наименьшей своей карточкой. При этом набор карточек без наименьшей по-прежнему у первого игрока будет строго больше. Пусть первый сделает так 500 ходов.

На 501-м ходу у него останется 2 карточки. Пусть он ходит с большей.

Тогда у него ровно 501 очко.

У первого игрока набор «строга больше» набора второго игрока без самой большой карты. До того момента, как второй игрок положит наибольшую свою карточку, первый может сохранять это свойство следующим образом: будет ходить с наименьшей из своих карточек (свойство при этом сохранится). Карту соперника он также будет бить так, чтобы свойство сохранилось. После того как соперник пойдет своей самой большой карточкой, первый пусть положит самую маленькую. Тогда его набор будет больше, чем набор второго без наименьшей карты, а значит, продолжая действовать по своей тактике, первый игрок при каждом ходе соперника будет получать очко. Таким образом он обеспечит 499 очков.

98. На первый взгляд кажется, что X должен стремиться создать побольше единиц, а Y — минус единиц.

Однако это не так, поскольку X в любой момент может переменить знак любого количества чисел (даже всех, или уж по меньшей мере 59-ти).

Следовательно, интерес Y состоит в том, чтобы на любом отрезке, по возможности, встречались как плюс, так и минус единицы (наличие одних только минус единиц для X столь же выгодно, как и наличие одних только плюс единиц).

Это значит, что оба партнера вплоть до последнего хода должны следить не столько за количеством плюс и минус единиц, сколько за количеством перемен знака в ряду.

Поэтому рассмотрим сначала вспомогательную задачу о переменных знака.

А именно, рассмотрим вместо данных чисел всевозможные произведения двух соседних чисел (каждое число умножается на своего соседа по часовой стрелке; например, если исходные числа были: $1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, \dots$, то новые будут: $-1, 1, 1, -1, 1, -1, \dots$) Новых чисел будет также 60, и минус единицы стоят там и только там, где поначалу знак менялся. Заметим при этом, что минусов (а следовательно, и плюсов) непременно будет четное число.

Очевидно, что когда X делает свой ход, то меняются ровно два новых числа, притом — любые, по его выбору (там, где начинается и кончается выбранный им ряд), а когда делает ход Y , то меняются любые два рядом стоящие числа.

В начальный момент все новые числа — минус единицы.

Докажем теперь, что Y всегда может добиться того, что среди них не более 30 плюс единиц, и что X может добиться того, что среди новых чисел будет не менее 30 плюс единиц.

а) Поначалу Y может играть как угодно. Но в тот момент, когда число плюсов стало больше 30 (это значит, что их стало 32), где-то есть два плюса, стоящих рядом. Заменяв их на минусы, он уменьшает число плюсов до 30.

б) Действия X таковы: он заменяет на плюс единицы все числа, стоящие на четных местах. Y своим ходом может испортить только одну из этих плюс единиц. Поэтому самое позднее на 29-м ходу X окажется, что на всех четных местах стоят плюс единицы. Теперь ходит Y ; имеется две возможности:

(*) Если хоть на одном нечетном месте также стоит плюс единица, то всего есть не менее 32 плюсов (по соображениям четности), и после хода Y будет не менее 30 плюсов;

(**) если же на всех нечетных местах стоят минус единицы, то Y своим ходом не может изменить число плюсов, и следовательно, после его хода так и останется 30 плюсов.

Итак, X может достичь ситуации, когда число плюсов равно 30. Теперь вернемся к исходной задаче; для нее это означает, что числа стоят по кругу так, что имеется 30 мест перемены знака, т.е. имеется 15 групп подряд стоящих плюс единиц, и 15 групп минус единиц.

Теперь X 15-ю ходами заменяет все группы минус единиц на плюсы. Таким образом, если бы ходов Y не было, то оказалось бы, что все числа – плюс единицы. Но Y тем временем делает 15 ходов, которыми он может восстановить 15 минус единиц.

Дальнейшая игра, по сути, не нужна; из сказанного видно, что лучшее, что могут делать X и Y – это превращать по одной цифре: минус единицу в единицу или наоборот. После 100 ходов ситуация будет точно та же, что после 44-х: будет 45 единиц и 15 минус единиц.

Ответ: при наилучшей игре X выигрывает 30 очков.

Комбинаторика; разное

99. Ответ. Да, можно.

Решение. Возьмем все номера, сумма цифр которых делится на 10. Любые два таких номера, очевидно, различаются не менее чем в двух местах, поэтому при вычеркивании одной цифры никакие два не совпадают.

Это решение, разумеется, не единственно. Пусть, например, x_1, \dots, x_6 – цифры номера, зададим какие-нибудь целые числа a_1, \dots, a_6 , b и возьмем все те номера, для которых $a_1x_1 + \dots + a_6x_6 + b$ делится на 10. Докажите сами, что если a_1, \dots, a_6 взаимно просты с 10, а b произвольно, то получающийся набор содержит ровно 100 000 номеров, удовлетворяющих

условию задачи. Наше исходное условие соответствует случаю $a_1 = \dots = a_6 = 1$, $b = 0$. Подумайте, что произойдет, если a_i не будут взаимно просты с 10, например, если $a_1 = 2$.

Замечание. Задачи этого типа возникают в теории кодов. Назовем *расстоянием* между двумя телефонными номерами $d(A, B)$ число мест, на которых эти два номера различаются (например $d(012345, 212365) = 2$, так как номера различаются на 1-м и 5-м местах). Множество телефонных номеров называется *кодом*; основная задача теории кодов состоит в том, чтобы выбрать код, имеющий как можно больше номеров, но так, чтобы расстояние между любыми двумя номерами было не меньше d . Число d называется *кодovým расстоянием*; построенный нами код имеет *кодóвое расстояние* $d = 2$.

100. Решение. За 11 сеансов школьники совершили 22 «сеансопосещения». Если все 11 сеансов в кинотеатре №1 были посещены, то на остальные 6 кинотеатров пришлось не более 11 посещений. Но тогда хотя бы в одном из них был посещен только 1 сеанс. Следовательно, кто-то из школьников (тот, кто был в это время в кинотеатре №1) в нем вообще не побывал, что противоречит условию.

101. Решение 1. Тривиальное решение состоит в том, что если все слагаемые привести к общему знаменателю 1996!, то все числители заведомо делятся на 1995, кроме двух последних. А два последних числителя равны соответственно 1996 и 1; поэтому их разность делится на 1995.

Решение 2. Задача имеет, однако, и гораздо более интересное решение. Дело в том, что выписанная дробь есть не что иное, как вероятность того, что при случайном раскладывании 1996 писем по 1996 конвертам ни одно письмо не будет вложено в нужный конверт (докажите это!) Знаменатель 1996! есть полное число способов раскладки, а числитель, стало быть, — число всех «плохих» способов.

Но при любом «плохом» способе письмо адресату №1 должно быть вложено в один из остальных 1995 конвертов; и ясно, что число способов во всех этих 1995 случаях одинаково. Вот потому-то число «плохих» способов раскладки обязано делиться на 1995.

102. Решение. Доказательство этого факта связано с прямым вычислением чисел N и M . Именно, известно, что

$$N = n! \left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots \pm \frac{1}{n!} \right),$$

а отсюда следует, что для M справедлива сходная формула с

заменой n на $n - 1$:

$$\frac{M}{n} = (n-1)! \left(1 - 1 + \dots \pm \frac{1}{(n-1)!} \right).$$

Из них немедленно следует нужный результат.

Интереснее было бы найти доказательство, устанавливающее напрямую «почти точное» взаимно однозначное соответствие между перестановками первого и второго типа. Попробуйте сделать это самостоятельно.

103. Решение. Заметим прежде всего, что номер любого фиолетового билета делится на 11, а поэтому и искомое максимальное расстояние d делится на 11. Далее, нетрудно заметить, что между билетами 908 919 и 909 909 нет ни одного фиолетового; это значит, что $d \geq 990$. С другой стороны, билеты вида \overline{abcabc} всегда фиолетовые (будем в дальнейшем называть их ультрафиолетами), а расстояние между двумя соседними ультрафиолетами равно 1001.

Поэтому $990 \leq d \leq 1001$, а поскольку d делится на 11, возможны лишь два ответа: либо $d = 990$, либо $d = 1001$. Что же верно?

Докажем, что между любыми двумя ультрафиолетами есть еще хотя бы один фиолетовый билет, откуда, очевидно, следует, что $d = 990$. В самом деле, пусть \overline{abcabc} — очередной ультрафиолет, отличный от 999 999. Пусть сначала $b < 9$. Если еще и $c < 9$, то фиолетовым будет билет $\overline{abca(b+1)(c+1)}$, номер которого увеличен на 11; если $a < 9$, то фиолетовым будет билет $\overline{abc(a+1)(b+1)c}$. Остается рассмотреть билеты вида 9b99b9; нетрудно убедиться, что между ним и следующим ультрафиолетом имеется, например, фиолетовый билет $\overline{9(b+1)000(8-b)}$. (Например, между билетом 929 929 и следующим ультрафиолетом 930 930 имеется билет 930 006.)

Случай $b = 9$ разбирается аналогично. Сделайте это сами.

104. Ответ. Это возможно тогда и только тогда, когда n четно. В этом случае легко строится пример нужной расстановки; мы приводим его для $n = 6$ (рис.17).

Решение. Докажем, что при нечетном n требуемой расстановки не существует. Пусть в квадрате $n \times n$ числа расставлены произвольным образом, и пусть a_1, \dots, a_n — суммы чисел по строкам, а b_1, \dots, b_n — по столбцам. Предположим, что все они различны.

Заметим, что при перестановке в таблице каких-нибудь двух строк или столбцов эти суммы (а только они нас интересуют) не

1	1	1	1	1	1
-1	1	1	1	1	1
-1	-1	1	1	1	1
-1	-1	-1	0	1	1
-1	-1	-1	-1	0	1
-1	-1	-1	-1	-1	0

Рис 17

меняются; поэтому, переставив, если нужно, строки и столбцы, мы сможем считать, что

$$a_1 > a_2 > \dots > a_n \text{ и } b_1 > b_2 > \dots > b_n.$$

Кроме того, очевидно, $a_1 \leq n$, $a_n \geq -n$ и $b_1 \leq n$, $b_n \geq -n$. Таким образом, наши числа могут принимать лишь $2n + 1$ значений: $-n, -n + 1, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, n$. Поэтому среди чисел a_i , b_i встречаются ВСЕ эти числа, кроме одного. Предположим для определенности, что единственное отсутствующее число неположительно; таким образом, среди чисел a_i , b_i имеется n положительных и n неположительных.

Пусть r – наибольший номер, для которого $a_r > 0$, а s – наибольший из номеров, для которых $b_s > 0$; таким образом,

$$a_1 > a_2 > \dots > a_r > 0 \geq a_{r+1} > \dots > a_n,$$

и аналогично

A	B
C	D

$$b_1 > b_2 > \dots > b_s > 0 \geq b_{s+1} > \dots > b_n.$$

Разобьем таблицу на 4 части (рис.18) таким образом, что суммы верхних строк и первых столбцов (строки A, B и столбцы A, C) – положительные числа, а нижние и последние суммы – неположительны.

Матрица A – размера $r \times s$. Из наших предположений следует, что $r + s = n$, и набор чисел $\{a_1, a_2, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s\}$ совпадает с множеством $\{1, 2, \dots, n\}$, тогда как набор $\{a_{r+1}, \dots, a_n, b_{s+1}, \dots, b_n\}$ отличается от множества $\{0, -1, \dots, -n\}$ лишь тем, что недостает одного элемента.

Поэтому можно следующим образом оценить сумму S_1 всех положительных и сумму S_2 всех неположительных строк и столбцов таблицы:

$$S_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_r + b_1 + \dots + b_s = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

а

$$S_2 = a_{r+1} + \dots + a_n + b_{s+1} + \dots + b_n \leq \\ \leq 0 + (-1) + (-2) + \dots + (-n+1) = -\frac{n(n-1)}{2}.$$

Отсюда $S_1 - S_2 \geq n^2$.

Докажем теперь, что при нечетном n последнее неравенство невозможно. В самом деле, пусть T_A, T_B, T_C, T_D — суммы чисел в частях таблицы, указанных на рисунке, тогда

$$S_1 = 2T_A + T_B + T_C,$$

а

$$S_2 = T_B + T_C + 2T_D,$$

так что

$$S_1 - S_2 = 2(T_A - T_D).$$

Эта разность максимальна, если прямоугольник A заполнен единицами, а прямоугольник D — минус единицами, и тогда она равна удвоенной сумме площадей этих прямоугольников:

$$S_1 - S_2 \leq 2(S_A - S_D) = 2[rs + (n-r)(n-s)] = 4r(n-r).$$

Но это последнее выражение максимально, если $r = n/2$ и в этом случае равно $n^2/4$ (как нам требуется), тогда как при нечетном n равенство невозможно, что и требовалось доказать.

105. Ответ. Нельзя.

Решение. Отметим первую, третью, пятую, седьмую и девятую монеты. При каждой операции переворачиваются две из них.

106. Решение. Очевидно, было сыграно $\frac{24 + 28 + 38}{2} = 45$ партий. Игрок пропускает одну партию после проигрыша, а C пропустил еще и первую партию; следовательно, из первых 44 партий A проиграл 21 партию, B — 17 и C — 6. Итак, B проиграл 17, а выиграл, следовательно, 11 партий.

107. Решение. Пусть $y = \operatorname{tg} x$. Тогда

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2},$$

и наше уравнение приобретает вид

$$11y(1 - 3y^2) = 3y - y^3.$$

Отсюда $y = 0$, т.е. $x = \pi k$, или

$$3 - y^2 = 11 - 33y^2, \quad y = \pm \frac{1}{2}, \quad x = \pm \arctg \frac{1}{2} + \pi n.$$

108. Решение. Очевидна оценка $S < 100$. Чтобы ее улучшить, домножим и разделим сумму на $\sin \frac{x}{2}$, и положим $t = 50x$. Тогда стандартные тригонометрические преобразования приводят ее к виду

$$S = \frac{\sin 50x \cdot \sin 50,5x}{\sin 0,5x} = \frac{\sin 1,01t \cdot \sin t}{\sin 0,01t}.$$

Оценим эту дробь. Если

$$|\sin 0,01t| > \frac{1}{50},$$

то, очевидно, $S < 50$. Но, как нетрудно проверить, $S > 50$, например при $t = \frac{\pi}{2}$. Следовательно достаточно рассмотреть случай $t < 2$, т.е. $0,01t < 0,02$. Но для малых аргументов $\sin z \approx z$, мы можем в знаменателе приближенно заменить $\sin 0,01t$ на $0,01t$, и получаем:

$$S \approx 100 \sin 1,01t \cdot \frac{\sin t}{t} \approx 100 \frac{\sin^2 t}{t}.$$

Экстремум правой части можно найти обычным способом – при помощи дифференцирования. Производная равна 0, если $2t = \operatorname{tg} t$; решая это уравнение приближенно, мы увидим, что $t \approx 1,1657$, и при этом значении $S \approx 72,46$.

Исходя из этих соображений, уже не так трудно доказать, например, что $S < 80$ при любом t .

Указание. Рассмотрите по отдельности три случая: $t < 1,5$; $1 < t < 1,8$ и $t > 1,8$.

109. Доказательство. Предположим, что это не так. Тогда числа a_1, \dots, d_1 не все равны 0; кроме того, очевидно, их сумма равна 0. Аналогично $a_n + \dots + d_n = 0$ для любого n .

Рассмотрим теперь алгебраическую сумму

$$S_r = a_r - b_r + c_r - d_r.$$

Легко убедиться, что

$$S_{r+2} = 2S_r,$$

откуда $S_{100} = 2^{49} S_2$. Из условия

$$a_{100}, \dots, d_{100} < 1\,000\,000\,000$$

следует, что $S_2 = 0$, т.е.

$$a_2 + c_2 = b_2 + d_2.$$

Поскольку, сверх того, $a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = 0$, можно сделать вывод, что $a_2 = -c_2$, $b_2 = -d_2$.

Но тогда нетрудно убедиться, что $a_4 = -2b_2$, $b_4 = -2c_2$ и т. д. Другими словами, за 2 шага все 4 числа удваиваются (и меняют порядок, что для нас несущественно). Отсюда ясно, что если хоть одно из них не равно 0, то за 100 шагов они вырастут слишком сильно.

110. Указание. Воспользуйтесь тем, что

$$a = \frac{a_1 + b_1}{2}, \quad b = \frac{b_1 + c_1}{2} \quad \text{т.д.}$$

111. Решение. Подобный набор $(x_1, x_2, \dots, x_{100})$ можно изобразить системой столбиков соответствующей высоты. (На рисунке 19 они закрашены.) Столбики умещаются в квадрате 100×100 , и незакрашенные строки также образуют систему чисел $(y_1, y_2, \dots, y_{100})$. Очевидно, $y_{100} = 100$ тогда и только тогда, когда $x_{100} < 100$, что и дает взаимно однозначное соответствие между наборами, в которых последнее число меньше 100, и равно 100; при этом если одна сумма делится на 10, то и другая тоже.

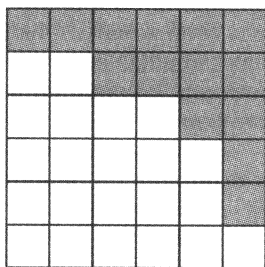


Рис. 19

Рисунок соответствует набору из шести чисел 1, 1, 2, 2, 3, 5; дополнительный набор — 0, 2, 4, 5, 5, 6.

112. Решение и анализ. Будем считать, что ничьих в турнире не было (ясно, что заменив ничью выигрышем любой из команд, мы не испортим таблицу).

Условимся теперь о терминологии. Если команда А выиграла у команд В, С, ..., Е, то такую команду мы будем называть «общим победителем» группы В, ..., Е. Если для n команд можно составить турнирную таблицу, в которой любые s команд имеют общего победителя, мы назовем такую таблицу *решением* задачи типа (n, s) . Сама же наша задача, очевидно, может быть сформулирована для произвольных n, s таким образом: существует ли турнирная таблица, которая является решением задачи типа (n, s) ? Исходная задача а) тогда переформулируется так: *доказать, что задача типа $(n, 2)$ не имеет решений при $n \leq 6$.*

Заметим прежде всего, что задача типа $(2, 1)$ не имеет решений: если команды всего две, то одна из них выиграла у другой, и для команды-победительницы нет команды, которая у нее выиграла.

Далее, очевиден следующий факт: *если задача (n, s) не имеет решения, то и задача $(2n + 2, s + 1)$ также не имеет решения*. В самом деле, при $2n + 2$ командах неизбежно имеется команда A , у которой выиграло не более n команд. С другой стороны, предполагается, что существует команда, выигравшая у A и, сверх того, у любых данных s команд; такую команду придется искать среди этих n или менее команд, т.е. придется решать задачу типа (n, s) , которая, по предположению, решения не имеет.

Отсюда сразу вытекает решение задачи а). Более того, это означает, что задача $(n, 3)$ может иметь решение только при $n \geq 15$, задача $(n, 4)$ — только при $n \geq 31$ и т. д.

Прежде чем пойти дальше, разберемся подробнее в ситуации для семи команд. Мы утверждаем: во-первых, решение (турнирная таблица) в этом случае единственное с точностью до перенумеровки команд, во-вторых, это решение дает следующая конструкция.

(К) Командам присваивается номер — вычет по модулю 7, и x выиграла у z , если $x - z$ — квадратичный вычет.

Докажем сначала, что **(К)** дает решение. Возьмем любые две команды x, y . Поскольку из двух чисел $x - y, y - x$ одно является квадратичным вычетом, а другое нет, будем для определенности считать, что вычетом является $y - x$.

Если z — общий победитель для x и y , то при произвольном a общим победителем для $x - a, y - a$ будет $z - a$. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $x = 0$.

Поскольку, далее, конструкция не меняется также и в случае, когда x, y заменяются на xb, yb , где b — квадратичный вычет, и поскольку мы уже условились считать $x = 0$, можно умножить y на квадратичный вычет, в частности на $1/y$, что позволяет свести задачу к одному-единственному случаю $x = 0, y = 1$.

Ясно, что нетрудно указать общего победителя для этой пары (это будет $z = 2$). Замечательно, впрочем, то, что можно не подбирать общего победителя даже и в этом случае, а рассудить так: поскольку каждая команда выиграла 3 матча, то имеется пара команд с общим победителем. А так как только что было доказано, что все пары равноправны, то общего победителя имеет также и пара $(0, 1)$, и вообще любая пара.

Наметим теперь доказательство того, что решение единственно с точностью до перенумерации.

Из приведенных выше рассуждений следует, что решение возможно только в том случае, если каждая команда проиграла не менее трех матчей; но при 7 командах это означает, что каждая

выиграла и проиграла ровно по 3 матча. Тогда для каждой команды имеется ровно 3 пары команд, у которых она выиграла; а так как всего есть 21 пара, то конструкция возможна, только если для каждой пары A, B имеется единственная команда C , которая выиграла у A и B .

Рассмотрим теперь произвольную команду A , и пусть B, C, D – команды, которым она проиграла. Допустим для определенности, что B выиграла у C . Тогда D – единственная команда, которая могла выиграть у A и B ; следовательно D выиграла у B и (по аналогичной причине) C выиграла у D . Остается выяснить, как сыграли свои матчи три команды E, F, G , у которых A выиграла. Каждая из команд B, C, D выиграла у них по одному матчу и по два проиграла. Допустим, что B и C выиграли у одной и той же команды E ; тогда обе они выиграли у пары (A, E) , что противоречит сказанному выше. Следовательно, каждая из команд B, C, D выиграла ровно у одной из этих команд: B – у E , C – у F , D – у G . Разобраться в том, как сыграли между собой E, F, G , мы предоставляем читателю.

Теперь перейдем к числам, большим 7.

Приведенный выше метод позволяет без особого труда решить задачу б). В самом деле, рассмотрим конструкцию, аналогичную **(К)**, для p команд, где p – достаточно большое простое число вида $4k + 3$ (если $p = 4k + 1$, то не выполняется очевидное условие «если команда x выиграла у z , то команда z проиграла x »). Рассуждая как выше, мы убеждаемся, что для того чтобы доказать утверждение: «для любых трех команд x, y, z существует четвертая команда t , которая выиграла у всех трех», достаточно доказать его для случая $x = 0, y = 1$ и произвольного z .

Эту задачу приходится уже решать перебором; однако он уже невелик. Для $p = 19$ перебор показывает, что утверждение верно. С другой стороны, как мы видели, p не может быть меньше 15. Числа между 15 и 18 остаются под сомнением.

Дает ли конструкция **(К)** решение для произвольного s , если p достаточно велико? Мне неизвестен ответ, но правдоподобно, что он положителен. Похоже на то, что квадратичные вычеты по модулю p образуют псевдослучайную последовательность. А именно, если начать со случайно выбранного числа $n, 0 < n < p$, то вычеты чисел $n, n + 1, n + 2, \dots$ есть набор нулей и единиц, который ведет себя как случайный (в нем около половины единиц и т.д.)

Чтобы получить корректное решение задачи в), применим намеченный выше подход «случайной таблицы». А именно, пусть имеется N команд и результат каждой встречи (выигрыш

или проигрыш) распределен случайно. Пусть для определенности $s = 5$; рассмотрим произвольную пятерку команд A, B, C, D, E и найдем вероятность того, что ни одна команда Z не выиграла у всех пяти. Для одной команды такая вероятность составляет, очевидно, $1 - \frac{1}{32}$. Поэтому вероятность, что ни одна из M ($M = N - 5$) команд не выиграла, равна $\left(1 - \frac{1}{32}\right)^M$. С ростом N эта вероятность стремится к нулю как экспонента; с другой стороны, число пятерок (A, B, C, D, E) растет всего лишь как степенная функция, и потому при больших N с ненулевой вероятностью для любой пятерки существует общий победитель.

Для того чтобы превратить это рассуждение в строгое доказательство, надо лишь перейти от теории вероятностей к комбинаторике. Рассмотрим всевозможные таблицы, описывающие турнир N команд; выберем произвольную пятерку (A, B, C, D, E) , тогда доля таблиц, в которых эта пятерка не имеет общего победителя, составляет $\left(1 - \frac{1}{32}\right)^M$. Поэтому доля таблиц, в которых любые 5 команд имеют общего победителя, не меньше, чем $1 - C_N^5 \cdot \left(1 - \frac{1}{32}\right)^M$, и при больших N эта величина положительна, т.е. искомая таблица существует. Тем самым решена (в положительном смысле) задача в).

113. Ответ. Уравнение имеет бесконечно много решений.

Решение. Лемма. Уравнение

$$x^2 = 2y^2 + 1$$

имеет бесконечно много решений в целых числах.

Доказательство. Простейшее доказательство этого (довольно известного) факта таково. Очевидно, что пара чисел $(1, 0)$ – решение. Из него можно получить, одно за другим, бесконечное число других решений таким способом: если (x, y) – решение, то непосредственно проверяется, что пара $(3x + 4y, 2x + 3y)$ – тоже решение. Таким образом мы последовательно получаем решения $(1, 0)$, $(3, 2)$, $(17, 12)$, $(99, 70)$, ...

Вернемся к нашей задаче. Данное уравнение можно переписать в виде

$$\frac{n}{m} = \frac{2(m+1)}{n+1}.$$

Предположим, что обе части равны $\frac{p}{q}$. Тогда

$$n = \frac{p}{q}m, \quad n + 1 = \frac{2q}{p}(m + 1),$$

откуда элементарными преобразования получаем

$$m(p^2 - 2q^2) = 2q^2 - pq.$$

Теперь, предполагая, что

$$p^2 - 2q^2 = 1,$$

мы видим, что m , а вместе с ним и n , являются целыми числами, а именно:

$$m = q(2q - p), \quad n = p(2q - p).$$

Пусть, например, $(p, q) = (17, 12)$. Тогда $m = 84$, $n = 119$.

114. Ответ.

а) $Y_2 = 399(21^2 = 441 > 399)$, а $Y_3 = 69\,999(42^3 = 74\,088 > 69\,999)$.

б) Ответ неизвестен.

115. Решение. Пусть $1\,000\,000 = N$.

Суммарное число решений уравнения $xy = n$ для всех $n < N$ равно числу решений неравенства $xy < N$. Для простоты будем решать более слабое неравенство $xy \leq N$, что изменит общее число решений на 49 (для наших целей это несущественно).

Зафиксируем x , тогда y должно удовлетворять неравенству

$$y \leq \frac{N}{x}, \quad \text{т. е. число решений неравенства при данном } x \text{ равно } \left\lfloor \frac{N}{x} \right\rfloor.$$

Отсюда следует, что число решений равно

$$\left\lfloor \frac{N}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{N}{N} \right\rfloor \approx N \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N} \right).$$

Чтобы получить более точную оценку, примем во внимание, что из двух множителей всегда один меньше, чем корень из N (т.е. 1000). Отсюда легко видеть, что число решений приближенно равно

$$N \left[2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1000} \right) - 1 \right].$$

Так как в каждом слагаемом ошибка меньше 1 (разность между числом и его целой частью), то суммарная ошибка меньше 2000.

Сумма в круглых скобках приближенно равна $C + \ln 1000$, где $C = 0,577\dots$ – константа Эйлера.

Поскольку $\ln 10 = 2,30\dots$, то искомое число приближенно равно

$$2 \cdot C + 6 \cdot \ln 10 - 1 \approx 6 \cdot 2,3 + 2 \cdot 0,577 - 1 \approx 13,95,$$

т.е. среднее число делителей n близко к 14.

Замечание. Из решения видно, что при $N \rightarrow \infty$ среднее число делителей числа n , $n < N$, растет примерно как логарифм N .

116. Ответ. Нельзя.

Решение. Пусть существуют натуральные a, b, n , для которых верно

$$n^2 < a^3 < b^3 < (n+1)^2.$$

Заметим, что $a < a+1 \leq b$. Имеем:

$$n^2 < a^2 < (a+1)^3 \leq b^3 < (n+1)^2.$$

Из этого следует, что

$$(n+1)^2 - n^2 > (a+1)^3 - a^3,$$

т.е.

$$2n+1 > 3a^2 + 3a + 1,$$

откуда

$$2n > 3a^2 + 3a.$$

Возводя в квадрат, получаем

$$4n^2 > 9a^4 + 18a^3 + 9a^2 > 4a^3,$$

откуда

$$n^2 > a^3.$$

Но $n^2 < a^3$ – противоречие.

Значит, таких чисел нет.

Замечание. Условие задачи равносильно следующему: *между любыми двумя кубами лежит по меньшей мере один квадрат*.

В действительности верно и более сильное утверждение: *между любыми двумя кубами лежит не менее двух квадратов* (есть единственное исключение между $1^3 = 1$ и $2^3 = 8$, но и его можно «обойти», если трактовать слово «между» как нестрогое неравенство: тогда между 1 и 8 лежат квадраты 1 и 4).

Доказательство аналогично приведенному, с одним отличием: указанный метод доказывает наличие противоречия только

для достаточно больших n , тогда как для $n < 6$ существование двух промежуточных квадратов надо проверить прямым перебором (например, между 27 и 64 лежат числа 36 и 49).

117. Решение основано на следующей лемме.

Лемма. Если $f(x) \in [-1, 7]$, то и $x \in [-1, 7]$.

Доказательство. Проще всего поглядеть на график функции

$$y = f(x)$$

и заметить, что он проходит через точки $(-1, 24)$ и $(7, 8)$, а вершина параболы лежит в точке $(4, -1)$.

Отсюда ясно, что для любого $y \in [-1, 7]$ уравнение

$$f(x) = y$$

имеет два вещественных корня, причем эти корни опять лежат на том же отрезке.

Теперь решение сразу проводится индукцией по n (первый шаг индукции состоит в том, чтобы заметить, что решения уравнения $y = 0$ принадлежит промежутку $[-1, 7]$).

Замечание. Эта задача была предложена на XXVI Турнире городов (весенний тур, 10–11 классы) в несколько иной формулировке: «Существует ли такой многочлен $f(x)$, что...».

В этой формулировке задача, естественно, имеет много решений, наиболее идейное из которых таково.

Возьмем $f(x) = T_2(x) = 2x^2 - 1 = \cos(2 \arccos x)$ – многочлен Лежандра.

Тогда очевидно, что

$$f(f \dots (f(x) \dots)) = \cos(2^n \arccos x).$$

Корнями этого многочлена являются все решения уравнения

$$2^n \arccos x = \frac{\pi}{2} + \pi k,$$

причем k может принимать 2^n значений от 0 до $2^n - 1$. Таким образом, здесь можно предъявить все корни, и даже в явном виде; они равны

$$\pm \frac{1}{2} \sqrt{2 \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{2}}}}}$$

Надо, впрочем, проверить, что разным комбинациям плюсов и минусов в формуле соответствуют разные числа, что несложно, но все-таки не вполне очевидно.

118. Решение. а) Из приведенных неравенств следует, что сумма кубов по меньшей мере в 4 раза больше, чем сумма квадратов. Отсюда легко понять, что хотя бы одно из чисел x_1, \dots, x_k больше 4; обозначим это число A .

Очевидно, $2A^2 - A > 28$.

Поэтому для выполнения первого неравенства необходимо, чтобы выполнялось неравенство:

$$(x_1 - 2x_1^2) + \dots + (x_k - 2x_k^2) > 28.$$

Но каждое слагаемое в этой сумме, как легко проверить, не превосходит $1/8$ (равенство достигается при $x = 1/4$).

Отсюда число слагаемых не может быть меньше $8 \cdot 28 + 1 = 225$, что значительно превышает требование задачи.

б) Из первого пункта видно, что целесообразно взять одно сравнительно большое число и много малых, причем малые лучше брать равными между собой. Подбор показывает, что хорошее решение можно получить, например, взяв 600 чисел, равных 0,1, и еще одно, равное 5,125.

в) **Ответ.** 516 чисел. Этот пункт оказался значительно труднее, чем казалось поначалу автору.

План решения следующий:

1) Заметить, что среди чисел должны быть как числа, которые больше 1, так и числа меньше 1.

2) Если имеется два числа $a > b > 1$, то можно заменить их на два равных друг другу числа d и d так, что неравенства сохранятся и даже усилятся.

3) То же самое для чисел, которые меньше 1.

Отсюда следует, что в оптимальном наборе могут присутствовать только два различных числа: $A > 1$ и $a < 1$, оба с некоторой кратностью. (В действительности здесь придется еще воспользоваться существованием оптимума.)

4) Доказать, что число A встречается только 1 раз. Кроме того, для удобства обозначим $m = k - 1$; число a , таким образом, встречается m раз.

5) После этого наши неравенства принимают вид

$$\begin{aligned} A + ma > 2(A^2 + ma^2), \quad m > \frac{2A^2 - A}{a - 2a^2}, \\ A^3 + ma^3 > 2(A + ma), \quad m > \frac{A^3 - 2A}{a - 2a^3}. \end{aligned}$$

Числа A и a должны быть такими, чтобы между дробями, ограничивающими m уместилось хотя бы одно целое число; при этом требуется, чтобы это целое число было как можно меньше.

Оказывается, минимум достигается при

$$a = \frac{8 - \sqrt{58}}{3} \approx 0,128$$

и при этом m равно 515.

119. Решение. Как ни странно, такая ситуация возможна.

Например: в турнире участвует 11 команд, т.е. играется 10 матчей по 2 партии в матче, всего 20 партий.

В команде *А* первый номер играл все 10 партий и набрал в них 6,5 очков (65%) а второй и запасной – по 5 партий, и каждый из них набрал по 4,5 очка (по 90%).

Итого команда *А* набрала 15,5 очков.

В команде *В* игрок №1 набрал 2,5 из 4 (62,5%), а номера второй и третий – по 7 из 8 (по 87,5%). В результате команда *В* набрала 16,5 очков.

Но это еще не самое интересное. Допустим, что проводится не турнир, а матч двух команд, но в несколько кругов. Оказывается, что даже здесь возможен случай, когда команда *А* на каждой доске набрала процент очков больше, чем команда *В*, но тем не менее команда *В* выиграла матч.

На первый взгляд, это абсурдно, ведь чтобы победить, надо, чтобы у вас было больше 50%, а у противника, соответственно, меньше. Тем не менее...

Допустим, что в команде три участника (один запасной), и матч проходит в 8 кругов. Таким образом, играется 16 партий.

Команда *А*: игроки **А, Б, В**.

Команда *В*: игроки **а, б, в**.

1 тур:	А	0,5:0,5	а	Б	0:1	в
2 тур:	А	0,5:0,5	а	Б	0,5:0,5	в
3 тур:	А	1:0	б	Б	0,5:0,5	в
4 тур:	Б	0:1	а	В	1:0	б
5 тур:	Б	0:1	а	В	0,5:0,5	б
6 тур:	Б	0,5:0,5	а	В	0,5:0,5	в
7 тур:	Б	0,5:0,5	а	В	0,5:0,5	в
8 тур:	Б	0,5:0,5	а	В	0,5:0,5	в

В итоге команда *А*:

А	набрал 2 из 3	67%
Б	набрал 2,5 из 8	31%
В	набрал 3 из 5	60%
Всего 7,5 из 16		

Команда *В*:

а	набрал 4,5 из 7	64%
б	набрал 0,5 из 3	17%
в	набрал 3,5 из 6	58%
Всего 8,5 из 16		

120. Ответ. 2004 способа.

Указание. Для любого k , $1 \leq k \leq n$, существует ровно один способ разбить данное число n на приблизительно равные слагаемые.

121. а) Ответ. Да; нет.

Решение. Для построения примера, когда число камней всегда будет больше 120, достаточно заметить, что данное число $N = 1001$ нечетно и делится на 7. Из первого следует, что собрать все камни в одну кучу никогда не удастся. Теперь предположим, что в одной из куч лежит несколько седьмых долей от общего числа камней (или, иными словами, число камней в куче кратно 143), тогда то же верно для другой кучи и ясно, что эта ситуация будет сохраняться постоянно. Следовательно, число камней в каждой из куч будет не меньше 143.

Теперь докажем, что в первом случае ответ положительный: рано или поздно в одной из куч окажется менее пятой части всех камней.

Заметим сначала, что не позднее чем после первого перекалывания в одной из куч окажется менее трети камней (при этом существенно то, что N не делится на три!). В самом деле, пусть в меньшей из куч количество камней равно $\frac{N}{3} + r$, тогда либо $r < 0$ и утверждение верно после нуля перекалываний, либо $0 < r < \frac{N}{6}$, и тогда после первого перекалывания во второй куче будет $\frac{N}{3} - 2r$ камней.

Итак, пусть в меньшей из куч число камней равно $\frac{N}{3} - r$, причем $r > 0$. Рассмотрим два случая. Если $r > \frac{N}{12}$, то число камней в этой куче меньше $\frac{N}{4}$. Если же $0 < r < \frac{N}{12}$, то после двух перекалываний, как нетрудно убедиться, в этой же куче будет $\frac{N}{3} - 4r$ камней, т.е. «недостаток» увеличится в 4 раза. Проведя такие операции несколько раз, мы неизбежно придем к ситуации, когда r станет больше $\frac{N}{12}$, т.е. число камней в куче станет меньше, чем четверть от общего числа.

Наконец, чтобы от четверти перейти к одной пятой, нужно опять-таки рассмотреть две возможности, но на сей раз достаточно двух перекалываний независимо от числа камней. В самом деле, пусть в меньшей из куч число камней равно $\frac{N}{4} - r$. Если

$r > \frac{N}{20}$, то это число уже меньше одной пятой (т.е. не превосходит 200), если же нет, то после двух перекладываний в этой куче будет $N - 4r$ камней, а в другой, соответственно, $4r$ камней, что меньше, чем пятая часть N .

Замечание. Примененные нами методы существенно используют тот факт, что у числа $N = 1001$ нет слишком маленьких делителей (все делители не менее семи). Если бы, к примеру, общее число камней делилось на 3, то можно было бы в одну кучу положить третью часть камней, в другую – две трети. При этом перекладывание сводилось бы в тому, что две кучи менялись бы ролями.

Отсюда читателю уже понятно, почему в данной задаче особую роль играет наличие простых делителей у числа камней N – притом *маленьких* простых делителей.

Задача для исследования. Пусть M – число, у которого нет маленьких простых делителей (скажем, нет делителей, меньших миллиона). Какого результата можно добиться в этом случае, т.е. для какого $\gamma < 1$ можно гарантировать, что доля камней в одной из куч станет меньше γ , и для каких γ это неверно?

Заметим, однако, что ответ зависит от того, каковы именно большие делители M , и потому такая задача намного сложнее, чем задача б), к которой мы и переходим.

б) Решение. Прежде всего заметим, что эта задача вполне аналогична задаче а), поскольку перекладывание камней означает, что в меньшей куче число (а следовательно и доля) камней удваивается, а в другой, если там доля камней равнялась β , составит $2\beta - 1$.

Разница лишь в том, что в первой задаче доля (от общего числа камней в каждой куче) была рациональным числом со знаменателем 1001, а в задаче б) доли от единицы иррациональны.

Тем же способом, что в пункте а), мы можем легко доказать, что на некотором шаге α_n станет меньше $1/5$. Можно применять тот же метод и дальше; при этом последовательно доказывается, что α_n станет меньше

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{80} = \frac{3}{16};$$

затем точно также можно получить оценку $3/17$ и т.д. Но что, собственно, значит «и т.д.»? Можно ли таким способом дойти до нуля? А если нет, то как получить оценку снизу?

Для этого, очевидно, нужно предъявить иррациональное число α , для которого любое α_n окажется не слишком малым. Мы сделаем несколько больше.

Назовем иррациональное число α *минимальным*, если при всех n

$$\alpha_n > \alpha, \quad \beta_n > \alpha.$$

Ниже будут предъявлены минимальные числа.

Для этого запишем искомое число α в виде бесконечной непериодической дроби, но не десятичной, а двоичной. Как и в десятичном случае, число иррационально тогда и только тогда, когда дробь непериодична.

Для начала укажем, что рациональные числа, которые у нас встречались раньше, в двоичной записи имеют такой вид:

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{3} = 0,010101... & \frac{1}{4} = 0,01 \\ \frac{1}{5} = 0,001100110011... & \frac{3}{17} = 0,00101101... \end{array}$$

(Для дроби $3/17$ указан период, дальнейшие цифры идут в том же порядке.)

Очевидно, удвоение числа означает, что запятая в двоичной дроби переносится на одно место влево. Поскольку в числе β мы, сверх того, отбрасываем единицу (т. е. целую часть), то можно сказать, что у обоих чисел α , β запятая переносится на 1 разряд и целая часть (если она есть) отбрасывается.

Но отсюда ясно, что после n шагов происходит то же самое: у обоих чисел запятые переносится на n разрядов, и отбрасываются целые части.

Поэтому наша задача может быть переформулирована в следующей форме.

Имеются две бесконечные непериодические последовательности, состоящие из нулей и единиц. Известно, что они дополняют друг друга (там, где в одной стоит ноль, у другой – единица). Разрешается взять любую из них и отбросить в ней любое число знаков спереди, а затем поставить впереди ноль, запятую и объявить то, что получится, бесконечной двоичной дробью. Какое наименьшее число при этом может получиться (в том же смысле, что и раньше)?

Прежде чем двигаться дальше, предъявим два минимальных числа.

Таковыми являются, например, числа

$$\delta = 0,0010101...0100101...01001...$$

(«внутри» числа $\frac{1}{3} = 0,010101\dots$ время от времени непериодическим образом вставляется комбинация цифр 001) и

$$\varepsilon = 0,001011001100\dots 1100101100\dots$$

(«внутри» числа $\frac{1}{5} = 0,00110011\dots$ время от времени вставляется комбинация 10).

Доказательство. В первом случае ясно, прежде всего, что в числе $1 - \delta$ никогда не встречается два нуля подряд, и потому $(1 - \delta)_n$ заведомо больше $1/4$. А для того чтобы δ_n было при всех n больше δ , достаточно, чтобы количество групп 01 после первой комбинации 001 было меньше, чем после всех остальных, чего, естественно, нетрудно достичь.

Таким образом, δ минимально. При этом число δ можно сделать сколь угодно близким к $1/6$, взяв уже в первый раз достаточно много групп (01) (равенство было бы достигнуто для

числа $\frac{1}{6} = 0,001010101\dots$, где группы 01 идут до бесконечности).

Доказательство минимальности числа ε аналогично, причем ε можно сделать сколь угодно близким к числу $7/40$.

Следствие. Наибольшее из минимальных чисел γ принадлежит отрезку $\left[\frac{7}{40}, \frac{3}{17} \right] = [0,175; 0,1764\dots]$.

Ниже будет показано, что $\gamma \approx 0,1750919\dots$

Для дальнейшего нам будет удобно такое обозначение. Пусть a — произвольный набор нулей и единиц, конечный или бесконечный. Тогда через \bar{a} обозначается набор, дополнительный к нему (там, где нули — стоят единицы, и наоборот).

Например, если $a = 001011$, то $\bar{a} = 110100$ и т.п.

В частности, $\beta = \bar{\alpha}$.

Естественно, конечные наборы мы можем рассматривать как числа, записанные в двоичной системе.

Лемма. Пусть α — минимальное число. Рассмотрим число a , составленное из первых k цифр, и число b , состоящее из следующих k цифр того же числа α . Тогда $b < \bar{a}$.

Доказательство. Допустим сначала, что $b > \bar{a}$, тогда $\bar{b} < a$. Поскольку $\alpha = a\bar{b}\dots$, то $\beta = \overline{a\bar{b}}\dots$. Отбрасывая в числе β первые k знаков, мы получаем число, которое меньше α , что противоречит минимальности α .

Пусть теперь $b = \bar{a}$. Таким образом, $\alpha = a\bar{a}\dots$ и, соответственно, $\beta = \bar{a}a\dots$. Отбросим в числе β первые k знаков, тогда $\beta_k = a\dots$. По предположению, $\beta_k \geq \alpha$, следовательно, следую-

щие k цифр числа β не меньше, чем \bar{a} . Соответственно следующие k цифр числа α не больше, чем a , и так как меньше они быть заведомо не могут, то $\alpha = a\bar{a}a \dots$, $\beta = \bar{a}a\bar{a} \dots$. Продолжая те же рассуждения, мы видим, что $\alpha = a\bar{a}a\bar{a}a \dots$ и $\beta = \bar{a}a\bar{a}a\bar{a}a \dots$ – периодические дроби, что опять-таки противоречит предположению.

Отсюда легко вытекают все оценки, полученные нами ранее. Так, если $k = 1$, то $a = 0$, $\bar{a} = 1$; поскольку $b < a$, то $b = 0$, $\alpha = 0,00\dots$. Теперь примем $k = 2$, тогда $a = 00$, $\bar{a} = 11$. Из условия $b < a$ получаем $b \leq 10$, $\alpha \leq 0,0010\dots$. Принимая затем $k = 4$, мы получим, что $\alpha \leq 0,00101100\dots$ и т.д.

Возникает естественная

Гипотеза. Число, составленное из следующих k цифр, должно быть на единицу меньше, чем \bar{a} ; в обозначениях леммы $b = \bar{a} - 1$.

Вообще говоря, это неверно, как будет показано чуть ниже. Однако это верно в случае, когда k есть степень двойки; и именно по этой формуле выписывается искомое число γ .

Ответ. Число γ имеет в двоичной записи вид

$$\gamma = 0,0010110011010010\dots$$

и может быть определено любым из следующих двух способов.

1. Первая цифра числа γ равна нулю. Если уже выписано 2^n первых цифр этого числа, которые образуют некоторое число a , то следующие 2^n цифр образуют число $b = \bar{a} - 1$.

2. Находим k -ю цифру числа γ по следующему правилу: число k записывается в двоичной системе, и подсчитывается число единиц в записи. Если оно четно, то цифра равна 1, если нечетно – то нуль.

Например, на 8-м месте стоит нуль ($8 = 1000_2$), а на девятом – единица ($9 = 1001_2$).

Десятичная запись числа γ была приведена выше.

Замечание. Из вида числа γ следует, что сформулированная выше гипотеза неверна, например, для $k = 3$ или $k = 5$. Действительно, первые 3 цифры числа γ составляют 001, а следующие три – не 101, как должно быть по гипотезе, а только 011; аналогично для пяти цифр.

Доказательство. Докажем вначале, что оба определения приводят к одному и тому же числу. Согласно определению 1), если $k < 2^n$, то цифры с номерами k и $k + 2^n$ дополняют друг к другу (одна равна нулю, другая единице), тогда как при $k = 2^n$ обе цифры равны нулю.

Но то же верно, если исходить из определения 2). Действительно, по определению 2) цифра с номером 2^n , так же как

цифра с номером 2^{n+1} , равна нулю (в двоичной записи этих чисел есть только одна единица), тогда как при $k < 2^n$ двоичная запись чисел k и $k + 2^n$ различается на единицу на $(n + 1)$ -м месте (в одном эта единица присутствует, в другом нет), так что эти цифры дополняют друг друга.

Далее, докажем, что γ иррационально. В самом деле, допустим противное. Тогда цифры числа γ , начиная с некоторого места, повторяются с некоторым периодом A . Запишем число A в двоичной системе: $A = 1xy\dots z$ (x, y, \dots, z — нули или единицы), и пусть A имеет m цифр. Рассмотрим теперь (также в двоичной записи) следующие два числа:

$$v = 100\dots 0100\dots 0$$

(число нулей между единицами в первой группе равно некоторому l , которое мы выберем чуть позже, а во второй группе равно $m - 1$) и

$$w = 100\dots 01100\dots 0$$

(число нулей в первой группе $l - 1$, во второй по-прежнему $m - 1$).

В первом числе 2 единицы, а во втором три. Поэтому в числе γ на месте с номером v стоит единица, а на месте с номером w — нуль. Но $v + A = 100\dots 10xy\dots z$, $w + A = 100\dots 100xy\dots z$ (число нулей в первом случае $l - 1$, во втором $l - 2$). Поэтому у обоих чисел $v + A$, $w + A$ поровну единиц, и на соответствующих местах стоит одна и та же цифра.

Остается выбрать l настолько большим, чтобы к этому моменту непериодическая часть, которая может быть в начале рационального числа, уже закончилась.

Докажем теперь, что γ является минимальным числом. При этом тот факт, что γ является наибольшим из всех минимальных чисел, будет уже прямым следствием его определения в варианте 1), так как индукция по $k = 2^n$ в совокупности с леммой показывает, что первые 2^n цифр числа γ — наибольшие из всех возможных.

Для доказательства минимальности воспользуемся определением 2). Докажем сначала, что $\gamma_n > \gamma$ для любого n . Для этого запишем число n в двоичной записи:

$$n = xy\dots z \text{ (} x, y, \dots, z \text{ — нули или единицы)}.$$

Естественно, мы будем считать, что в числе n нечетное число единиц, в противном случае γ_n начинается с единицы и заведомо больше γ .

1. Пусть сначала последняя цифра числа n равна 0. Тогда в числах n и $n + 1$ число единиц различается на 1 (в числе $n + 1$ последняя цифра 1, а остальные цифры совпадают).

Следовательно, в числе $n + 1$ число единиц четно, и

$$\gamma_n = 0,01\dots > \gamma = 0,00\dots,$$

что и требовалось.

2. Пусть, далее, число n заканчивается четным числом единиц:

$$n = \dots 011\dots 1$$

Тогда $n + 1 = \dots 100\dots 0$ и в числах n , $n + 1$ опять-таки количество единиц разной четности, как и в случае 1.

3. Пусть n заканчивается нечетным числом единиц, причем их больше одной. Тогда

$$n = \dots 011\dots 1$$

$$n + 1 = \dots 100\dots 00$$

$$n + 2 = \dots 100\dots 01$$

$$n + 3 = \dots 100\dots 10$$

В числах n и $n + 1$ количество единиц нечетно, а в числах $n + 2$ и $n + 3$ оно на единицу больше, чем в числе $n + 1$, т.е. четно. Отсюда $\gamma_n = 0,0011\dots > \gamma = 0,0010\dots$

4. Случай, когда n заканчивается только одной единицей, т.е.

$$n = \dots 1000\dots 001,$$

исследуется аналогичным образом, но требует более длинных рассуждений. Причина этого понятна: в первых трех случаях γ_n и γ различаются уже, в худшем случае, в четвертом знаке, тогда как в последнем случае разность между γ_n и γ может быть сколь угодно мала.

Мы предоставляем читателю самому разобрать этот случай; заметим только, что необходимо прежде всего выписать последние цифры числа в форме $\dots 011\dots 100\dots 01$ (последняя цифра – единица, перед ней s нулей, перед которыми, в свою очередь, стоит t единиц) и рассмотреть по отдельности случаи, когда $s + t$ четно или нечетно.

Наконец, требуется еще доказать, что $\beta_n > \gamma$ при всех n , где $\beta = 1 - \gamma$. Но это доказательство полностью аналогично уже приведенному. В самом деле, очевидно, что дополнительное к γ число $\beta = 1 - \gamma$ строится точно по тому же закону, что γ , с одной лишь разницей: в нем k -я цифра равна единице, если число единиц в записи k нечетно, и равна нулю, если оно четно.

Приведенные выше рассуждения проходят с минимальными изменениями.

Заключительное замечание. Мы доказали, что число γ является предельным: если $\beta > \gamma$, то можно за несколько операций получить число, меньшее чем β .

Однако в действительности число γ не достигается. Придумайте сами пример числа, начав с которого мы никогда не достигнем значения γ или меньшего (хотя и сможем неограниченно приблизиться к γ).

122. Да, могло. Пусть, например, $n = 4$, и таблица до турнира выглядела так:

	А	Б	В	Г	Рейтинг до турнира
А	**	2 из 4	2 из 3	2 из 3	6 из 10, или 60
Б	2 из 4	**	2 из 3	2 из 3	6 из 10, или 60
В	1 из 3	1 из 3	**	12 из 24	14 из 30, или 46,666
Г	1 из 3	1 из 3	12 из 24	**	14 из 30, или 46,666

а таблица турнира выглядела так:

	А	Б	В	Г	Рейтинг по результатам турнира	Окончательный (суммарный) рейтинг
А	**	$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	58,333	59,0909...
Б	$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	**	$1 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	$1 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	58,333	59,0909...
В	$0 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	$0 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	**	$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	41,667	45,238...
Г	$0 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	$0 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	**	41,667	45,238...

Причина в том, что участники до турнира могли встречаться каждый с каждым *неравное* число раз (как оно практически всегда и бывает на практике). Если бы к условию задачи было добавлено условие «до турнира каждый встречался с каждым одно и то же число раз», такая ситуация была бы невозможна. Докажите это!

123. Ответ. Фокус удаётся.

Это можно сделать, например, таким образом. Три карты из 5 идут либо подряд (например 234 или 451), либо две рядом, одна в стороне.

В первом случае помощник забирает себе среднюю карту (остаются две карты не подряд).

Во втором помощник берет себе ту карту, которая идет не подряд (остаются две подряд).

При этом фокусник легко угадывает взятую карту.

Есть и другие решения.

124. Прежде всего переменим знак у всех чисел последней строки, а затем – также у всех чисел последнего столбца (т.е. у всех сумм). При этом последнее число остается без изменений (мы дважды меняли его знак). Теперь таблица обладает следующим свойством: сумма чисел в любом ряду («рядом» мы будем называть строку или столбец) равна 0. Будем округлять так, чтобы это свойство соблюдалось.

Если один из рядов таблицы (строка или столбец – безразлично) целиком состоит из целых чисел, то его трогать, во-первых, запрещено, а во-вторых, не нужно. Поэтому мы будем рассматривать только те ряды, в которых есть нецелые числа; очевидно, таких чисел всегда не менее двух в ряду.

Применим индукцию по количеству нецелых чисел в таблице (если их ноль, то опять-таки доказывать нечего). Пусть в данный момент в таблице N нецелых чисел. Будем считать, что все доказано для всех таблиц данного размера, в которых нецелых чисел меньше чем N .

Построим граф, вершинами которого являются ряды данной таблицы (при этом ряды, состоящие из целых чисел, мы не рассматриваем), а ребра соединяют строку и столбец, если число, стоящее на их пересечении – нецелое. (Таким образом, все вершины разбиты на две группы, и любое ребро соединяет вершину первой группы с вершиной второй.) По предположению, из каждой вершины исходит не менее 2 ребер. Отсюда сразу следует, что в графе есть цикл. Без ограничения общности можно считать, что этот цикл имеет следующий вид: $1-1$; $1-2$; $2-2$; $2-3$; $3-3$; ... $(n-n)$; $(n-1)$.

Это значит, что нецелые числа, входящие в цикл, расставлены так, как показано на рисунке 20.

a_1	b_1						
	a_2	b_2					
		a_3	b_3				
			a_4	b_4			
b_5				a_5			

Рис. 20

Теперь заставим эти числа «ползти» к целым. А именно, мы будем уменьшать числа a_i и увеличивать числа b_i на одно и то же число: тем самым сумма по строкам и по столбцам остается неизменной.

Будем увеличивать до тех пор, пока хотя бы одно число не станет целым. (Тот же процесс можно описать и несколько иначе: рассмотрим числа $\{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_n\}$, а также числа $\{1 - b_1\}, \{1 - b_2\}, \dots, \{1 - b_n\}$. Пусть ϵ — наименьшее из этих чисел, тогда надо уменьшить a_i и увеличить b_i именно на ϵ .)

Теперь в таблице стало, как минимум, на одно целое число больше, и остается применить индукцию.

125. Ответ. а) Да; б) нет.

Решение задачи а). Тройку показателей за год можно рассматривать как координаты точки в трехмерном пространстве; тогда соответствующие 4 точки являются вершинами некоторого тетраэдра. (Если они лежат на одной прямой или на одной плоскости, это можно поправить за счет «уточнения» цифр.)

Очевидно, тетраэдр $ABCD$ всегда можно спроектировать на подходящую прямую таким образом, чтобы проекции его вершин расположились в заданном порядке (например, в порядке A, B, C, D). Простейший способ сделать это таков: сначала спроектируем параллельно плоскости BCD , тогда три вершины спроектируются в одну точку, а четвертая будет лежать в стороне; затем чуть-чуть подвинем эту плоскость так, чтобы проекции точек B, C, D разъединились; при этом точка A по-прежнему будет первой, а три других — за ней. Для того, чтобы также и точки B, C, D расположились в нужном порядке, можно применить аналогичный прием.

Остается заметить, что вычисление значений линейной функции есть в точности то же самое, что проецирование точек в подходящем направлении на числовую ось.

Построение контрпримера в случае б). Рассуждаем, как выше, только теперь мы имеем не 4, а 5 точек A, B, C, D, E . Предположим, что точка E находится внутри тетраэдра $ABCD$. Тогда очевидно, что и проекция точки E , как ни проектируем, окажется где-то между остальными четырьмя точками, тогда как нам требуется, чтобы она оказалась крайней. Ясно также, что малое уточнение здесь, вообще говоря, ничем помочь не сможет.

Замечание. Если бы в условии не было разрешения «уточнять» цифры, то задача была бы неразрешима, даже если бы речь шла только о трех годах. Почему?

Задачи для самостоятельного решения

126. Ответ на задачу (в): ни одной. Существуют многогранники, которые могут стоять только на вершинах. Пример: тренога фотографа. Другой пример: возьмем, например, икосаэдр и на каждой из его граней построим треугольную пирамиду; получится «колючая звезда», которую тоже невозможно просто-напросто поставить на какую-то грань (вопрос о том, устоит ли она, уже не существует). Несложно также привести пример многогранника, который можно поставить на некоторые грани – но при этом устоять ни на одной из них он не сможет.

Ответ на задачу б): одна грань. Пример такого рода как раз и дает «ванька-встанька». Для этого достаточно, чтобы центр тяжести располагался вблизи одной из граней.

Меньше единицы ответ быть не может как из физических соображений, так и из математических.

С точки зрения физики: допустим, что многогранник не может стоять ни на одной из своих граней, т.е. на какую его ни поставь – он будет перекашиваться на другую. Тогда можно утилизировать энергию, выделяющуюся при перекачивании, т.е. создать вечный двигатель.

Математическое доказательство таково. Опустим перпендикуляры из центра тяжести O на все грани. Если перпендикуляр OA попадает не на грань (а только в ее плоскость, за гранью), то он пересекает другую грань в некоторой точке B , откуда немедленно следует, что $OA > OB > OC$, где C – основание перпендикуляра к этой грани, следовательно, перпендикуляр OA – не самый короткий.

Отсюда следует, что самый короткий перпендикуляр неизбежно падает на грань.

Случай а) намного сложнее. Нетрудно привести пример, когда таких грани две (простейший такой пример – усеченная пирамида), а вот может ли быть одна?

Ответ неизвестен. Однако можно построить «почти однородный» многогранник, способный стоять только на одной грани.

Для этого вначале построим многоугольник T , у которого перпендикуляры на стороны, опущенные из «центра», всегда, за одним исключением, попадают не на стороны, а на их продолжения.

Для начала возьмем правильный n -угольник $A_1A_2 \dots A_n$. Он может стоять на любом своем ребре, но весьма неустойчиво (все перпендикуляры из центра падают на стороны, но достаточно

было бы их чуть-чуть сместить, и они бы уже прошли мимо стороны).

Немного сместим центр тяжести вниз (это можно сделать, позволив нашему многоугольнику быть «немного неоднородным»). Легко убедиться, что почти все перпендикуляры из смещенного центра падают уже не на стороны, а на их продолжения; исключения составляют перпендикуляры к нескольким сторонам, находящимся внизу. Пусть это стороны A_1A_2 , A_2A_3 , ..., $A_{m-1}A_m$.

Теперь проведем диагональ A_1A_m и отрезем то, что лежит ниже ее. То, что получится, и есть T . Теперь только перпендикуляр на срезанную диагональ, превратившуюся в сторону, попадает на нее; все остальные «промахиваются».

Числа n и m можно выбирать более или менее произвольно, с оговорками: должно быть $n \gg m \gg 1$ и n должно быть нечетным, а m — четным. (Например, можно взять $n = 1001$, $m = 30$).

Для того, чтобы превратить T в трехмерное тело, достаточно построить призму, у которой T является поперечным сечением. Если эта призма будет достаточно высокой (примером «высокой» призмы является обычный карандаш) и мы слегка срежем наискосок основания, то полученное тело сможет стоять только на одной грани.

Можно ли построить вполне однородное выпуклое тело, способное стоять только на одной грани, неясно.

127. Указание. Можно рассматривать эту сумму, как сумму k независимых случайных величин, где k -я величина с равной вероятностью $1/2$ принимает значение 0 или k .

Таким образом, сумма распределена приблизительно по нормальному закону с матожиданием $M = (1 + 2 + \dots + 100)/2 = 2525$ и с дисперсией

$$D = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + 100^2}{4} = \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{24} \approx 84600.$$

Таким образом, среднеквадратичное отклонение $\sigma \approx 291$. Максимум должен достигаться именно при значении 2525. Доказательства нет.

Прямая проверка показывает, что если число 100 заменить на меньшее, то максимум действительно всегда достигается при среднем значении (проверка проведена до числа 20), но вначале (до числа 9) максимум чаще всего нестрогий. Например, для числа 2 принимаются по разу значения 0, 1, 2, 3; для числа 4 шесть значений принимаются по одному разу, и пять — по два раза, и т.д.

128. Решение неизвестно. Можно лишь указать примеры:

а) $120 = C_{16}^2 = C_{10}^3$.

б) Имеется бесконечная серия чисел вида $C_n^{k+1} = C_{n+1}^k$.

Действительно, сократив одинаковые члены в равенстве

$$\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!},$$

мы получим диофантово уравнение на числа n, k вида $n^2 - 3nk + k^2 - 2k - 1 = 0$, которое поддается решению. Первое решение имеет вид $n = 14, k = 5$, а соответствующее целое число имеет даже не два, а три принципиально разных представления: $3003 = C_{14}^6 = C_{15}^4 = C_{78}^2$.

Второе решение диофантова уравнения имеет вид $n = 4894, k = 1869$ (выписывать само число C_n^k нет желания, поскольку оно имеет несколько тысяч цифр).

О других повторениях мне ничего не известно.

129. Решения. а) Один из способов состоит в том, чтобы покрыть квадрат одним кругом радиуса $r = \sqrt{2}/2$, затем немного уменьшить этот радиус. Останется 4 не покрытых уголка, которые можно покрыть четырьмя маленькими кругами.

Другой способ приведен ниже.

б) Начнем с задачи 63), как наиболее простой из трех. Ответ в этой задаче: $\alpha = 1$. Иными словами, квадрат можно покрыть несколькими кругами, если разрешается, чтобы их суммарная площадь равнялась $1 + \varepsilon$, как бы мало ни было ε .

Очевидно, достаточно доказать следующую лемму:

Лемма. Если можно покрыть квадрат площади 1 кругами суммарной площади $1 + \varepsilon$, то существует также способ покрыть его кругами суммарной площади $1 + \varepsilon/2$.

Для этого сначала заметим, что если единичный квадрат можно покрыть кругами суммарной площади меньше $1 + \varepsilon$, то любую фигуру площади S можно покрыть кругами суммарной площади меньше $S \cdot (1 + \varepsilon)$.

Для доказательства этого вспомогательного утверждения достаточно заметить, что любую фигуру можно «почти точно» покрыть сеткой из мелких квадратиков. Покрыв каждый квадрат нужным образом, мы получим покрытие произвольной фигуры.

Теперь докажем лемму. Для этого мы впишем в единичный квадрат круг, а затем оставшуюся фигуру (ее площадь равна $S = 1 - \pi/4$) покроем мелкими квадратиками, с тем, чтобы покрыть ее кругами суммарной площади меньше $S \cdot (1 + \alpha)$.

Этого достаточно для доказательства леммы, а с тем доказано и утверждение задачи.

Перейдем к задаче 61).

Очевидно, единичный квадрат можно покрыть сеткой из правильных шестиугольников, и затем каждый шестиугольник покрыть кругом. Отношение площади круга к площади шести-

угольника равно $\gamma = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. Поскольку площадь сетки немного больше площади квадрата, то суммарная площадь кругов (обозначим ее β) будет больше γ , но разность $\beta - \gamma$ можно сделать сколь угодно малой, взяв достаточно малые шестиугольники.

Докажем теперь, что приведенная конструкция оптимальна, т.е. $\alpha = \gamma$.

Лемма. Пусть даны N кругов одинакового радиуса (можно считать, что радиус равен 1), и в каждый вписан многоугольник, содержащий центр круга, причем количество углов всех многоугольников не превышает $6N$. Тогда суммарная площадь многоугольников не превышает суммарной площади вписанных в те же круги правильных 6-угольников.

Для доказательства леммы соединим каждую вершину многоугольника с центром O соответствующего круга; тем самым многоугольник разбит на треугольники. Удвоенная площадь треугольника не больше $\sin \alpha$, где α — угол при вершине O ; при этом сумма всех таких углов равна $2\pi N$, а их количество равно $n \leq 6N$. Таким образом, требуется оценить сверху выражение $\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_n$ при условии $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 2\pi N$. Можно считать, что $n = 6N$ (если это не так, добавим несколько нулевых углов). Теперь можно, например, воспользоваться тем, что график функции $\sin x$ — выпуклый, и потому максимум достигается, если все слагаемые равны между собой; в этом случае все углы будут по $\pi/3$, поэтому у нас и получится сумма площадей правильных шестиугольников.

Вернемся к нашей задаче, причем будем решать ее для произвольного многоугольника T площади 1 с углами, не превосходящими $2\pi/3$. Пусть T покрыт несколькими кругами одного радиуса ϵ . Тогда T можно разбить на многоугольники по следующему принципу: берем точки, для которых данный центр круга — ближайший (рис.21). Поскольку круги

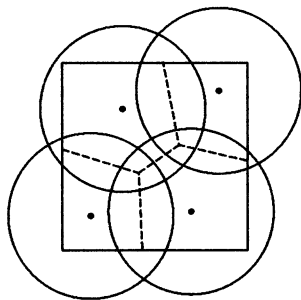


Рис. 21

одного радиуса, то сторонами получающихся многоугольников являются общие хорды двух пересекающихся кругов (или части этих хорд), и каждый многоугольник R_i целиком лежит внутри соответствующего круга (иначе некоторые точки не были бы покрыты). Более того, центр круга, естественно, лежит в R_i .

Среднее значение внутреннего угла при каждой вершине разбиения не превосходит $2\pi/3$ (это проверяется отдельно для вершин внутри T , точек на границе и углов – в последнем случае как раз и важно, что углы T не превышают $2\pi/3$), откуда легко следует, что число углов не превосходит $6N$. Значит, по лемме суммарная площадь многоугольников (которая равна 1) не

больше, чем $N \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \varepsilon^2$, т.е. суммарная площадь кругов не меньше $N \cdot \pi \varepsilon^2 \geq \frac{2}{3\sqrt{3}\varepsilon^2} \cdot \pi \varepsilon^2 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$, что и требовалось.

Замечание. Отсюда, в частности, следует, что если T – правильный 6-угольник, то наилучший способ его покрытия – покрыть его одним кругом; при любом другом способе суммарная площадь будет строго больше.

Заметим еще, что приведенное доказательство с минимальными изменениями проходит для любого многоугольника с числом сторон, не большим 6.

62) Здесь оптимальная конструкция такова.

Во-первых, ясно, что часть квадрата надо заполнить кругами большего радиуса (как именно – будет сказано ниже), а оставшуюся часть – по методу, описанному в решении 61), т.е. мелкой 6-угольной сеткой.

Во-вторых, из соображений, высказанных выше, ясно, что меньший радиус должен быть как можно меньше. Но и больший радиус тоже должен быть малым; иначе говоря, требуется, чтобы было $1 \gg r_1 \gg r_2$ (чем сильнее они уменьшаются, тем лучше; оптимальное соотношение не достигается, но говоря условно,

требуется, чтобы отношения $\frac{r_1}{1}$ и $\frac{r_2}{r_1}$ оба равнялись нулю).

Заполним квадрат мелкой (относительно мелкой; применительно к радиусу r_2 она будет, напротив, очень крупной) 6-угольной сеткой. Затем каждому 6-угольнику сопоставим круг радиуса r_1 с тем же центром.

Таким образом, суммарная площадь всех покрывающих кругов (если пренебречь эффектами, связанными с границей квадрата – а, как мы знаем, это вполне корректно) равна площади кругов радиуса r_1 (их столько же, сколько 6-угольников), плюс

площадь оставшихся «уголков», умноженная на γ . Будем называть второе слагаемое *полной* площадью уголков; она в γ раз больше их «настоящей» площади.

Отсюда понятно, что нам достаточно рассматривать покрытие одного 6-угольника, которому соответствует 1 «большой» круг (радиуса r_1) и 6 «уголков».

Пусть боковая сторона каждого 6-угольника равна a (число a можно выбрать произвольно, лишь бы оно было достаточно малым). Должны выполняться неравенства $a > r_1 > a\sqrt{3}/2$. Это значит, что круг не полностью покрывает соответствующий ему 6-угольник, но притом вылезает за его границу.

Остается найти соотношение между a и r_1 , при котором достигается экстремум. Примем вначале $r_1 = a$, и будем медленно увеличивать этот радиус. Если он увеличивается на δ , то площадь большого круга увеличилась на площадь кольца радиуса r_1 и ширины δ , т.е. приблизительно на $2\pi r_1 \delta$. С другой стороны, площадь «уголков» уменьшилась на $6\beta r_1 \delta$ (рис.22), соответственно, их полная площадь уменьшилась на $6\gamma\beta r_1 \delta$.

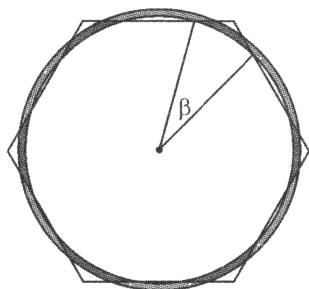


Рис 22

Очевидно, суммарная площадь уменьшается, пока первое выражение меньше второго, и начинает расти после того, как они сравниваются. Минимум, стало быть, достигается, если они равны, т.е. требуется, чтобы выполнялось равенство $2\pi r_1 \delta = 6\gamma\beta r_1 \delta$. Сокращая, получаем $\beta = \frac{2\pi}{6\gamma} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

При этом $r_1 = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\beta}{2}\right)}$. Коэффициент, с которым

покрыт весь 6-угольник (и, тем самым, также и весь квадрат), нетрудно вычислить, но он имеет несколько «зубодробительный» вид.

Стоит заметить, что тем же способом можно найти оптимальное покрытие, если разрешается брать круги трех разных радиусов, и вообще, любого фиксированного числа k разных радиусов.

Таким образом, мы решили задачу почти полностью. Однако приведенное доказательство имеет «лакуну»: не доказано, что центры «больших» кругов следует размещать именно в форме

6-угольной решетки. Возможно, читатели сумеют восполнить этот пробел.

130. Решение. а) Очевидно, что достаточно найти такие k , m , что по модулю n

$$a_k \equiv a_m, \quad a_{k+1} \equiv a_{m+1},$$

тогда

$$a_{k-m} \equiv a_0 \equiv 0.$$

б) Начинаящуюся не с нуля последовательность Фибоначчи, в которой ни один член не делится на 5, легко указать: 1, 3, 4, 7, 11, 18, ... В ней остатки от деления на 5 чередуются: 1, 3, 4, 2, 1, 3, ...

Причина этого в том, что по модулю 5 можно извлечь корень из 5 (он равен 0), и поэтому «золотое сечение»

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} = 3 \pmod{5}$$

является рациональным числом. Соответственно, геометрическая прогрессия $1, 3, 3^3, \dots, 3^n, \dots$ является в то же время последовательностью Фибоначчи – естественно, без нулей.

в) Из предыдущего немедленно следует, что такую последовательность можно построить для любого такого p , что по модулю p извлекается корень из 5. Согласно закону взаимности Гаусса, это возможно, если $p = 5$ или $p = 5k \pm 1$. Так, например, для $p = 11$ корень из 5 равен ± 4 , «золотое сечение» равно 4 или 8, и годятся геометрические прогрессии с этими знаменателями, например 1, 4, 5, 9, 3, ...

Напротив, для других чисел вопрос не столь прост. Для $p = 7$ нужной последовательности Фибоначчи не существует, что можно доказать перебором всех последовательностей, начинающихся с чисел $\{1, k\}$, где $1 \leq k \leq 6$. В общем случае ответ неизвестен.

ЧТО ТАКОЕ МАТЕМАТИКА, ИЛИ МЕТАМАТЕМАТИКА ДЛЯ НЕМАТЕМАТИКОВ

О той пользе, которую математика приносит обществу, знают все. Любое предисловие к любой книге по математике начинается именно с этой, в общем-то совершенно справедливой, мысли. Говорится о том, как математика помогает рассчитать траекторию ракеты, построить мост, оценить размер страховых платежей. На крайний случай, говорят о том, как математика позволяет познавать законы природы.

Все это совершенная правда. Но гораздо реже и меньше говорят о той пользе, которую математика приносит человеку – и тому, кто собирается посвятить ей жизнь, и тому, кто только немного постоит на границе великой страны, называемой Математика.

* * *

Широкая публика обычно представляет себе ученого-математика либо в виде скучного рассеянного сухаря, который вечно, выходя из дома, забывает то калоши, то зонтик, – либо как некоего средневекового мага (смотри американские фильмы типа «Изгоняющий дьявола»), который вещает, орудя таинственными знаками, недоступными простым смертным.

(Замечу в скобках, что злоупотребление «таинственными знаками» – интегралами, алефами, кванторами и так далее – нехарактерно для серьезных математиков. Они куда выше ценят работу, в которой удалось обойтись наиболее простым математическим аппаратом – другое дело, что это удастся сравнительно редко.)

И потому я хотел бы начать с анекдота об А.Н.Колмогорове, услышанного мною около 30 лет назад. Слово «анекдот» я употребляю здесь не в современном, а в классическом смысле: анекдот есть случай, иногда смешной, иногда серьезный, но непременно взятый из реальной жизни.

Итак, мой знакомый М.С. рассказал мне, как ему довелось присутствовать на каком-то военном совещании.

«Выступил полковник; трижды исписал всю доску формулами. Потом вышел Андрей Николаевич [Колмогоров]; он не написал ничего, но коротко и внятно объяснил собравшимся, о чем, собственно, говорил предыдущий докладчик.

И выходя с заседания, — закончил М.С., — я услышал такой обрывок разговора двух генералов:

— Этот штатский, видно, в математике не шибко силен, но в нашем деле здорово разбирается».

Можно было бы добродушно посмеяться над генералами: как же они ошиблись, приняв одного из величайших математиков XX века за «штатского, который не шибко силен в математике». Но в действительности генералы не виноваты. Их слова — это довольно-таки типичная реакция непрофессионала на *настоящую* математику.

* * *

Что же собой представляет настоящая математика? Позвольте мне сначала сказать, чем она НЕ является.

Математика, в сущности, не наука. А если наука — то все прочие науки — не науки. Слишком уж велика разница. Математика ближе к музыке, чем к физике. И пропасть между математикой и физикой глубже, чем между физикой и социологией. Математика — это образ мысли, это человеческий характер.

И математик — это не просто человек, окончивший мехмат. Это прежде всего определенный склад ума и, не побоюсь сказать, определенное состояние души.

А те, кто применяют математику, чаще всего просто подставляют полученные из опыта параметры в известные формулы. Речь идет, таким образом, всего лишь о том, что некоторые люди (например, социологи или экономисты) выучили некоторое количество алгоритмов и умеют эти алгоритмы применять. Это не совсем бесполезно. Но математика тут почти что и ни при чем.

Для иллюстрации приведу такой пример.

- Психолог Д. Канеман в своей книге «Думать. Быстро и медленно» утверждает, что люди очень часто принимают нерациональные решения. С этим спорить, пожалуй, невозможно. Однако все ли приводимые им примеры убедительны?

Вот один нелогичный, по мнению психолога, поступок. Участникам эксперимента предлагают на выбор: либо получить 46 долларов, либо бросить монетку и в случае успеха получить 100 долларов. Что лучше? Эксперимент показывает, что «лучше синица в руке, чем журавль в небе: большинство предпочитает получить гарантированные 46 долларов, чем 50%-й шанс на получение 100 долларов».

Психолог думает, что такое поведение нелогично или, по меньшей мере, нерационально. Согласимся ли мы с этим?

На первый взгляд, надо согласиться: ведь если вы идете на риск, то получите (в математическом ожидании) не 46, а целых 50 долларов. Так и рассуждал психолог.

Но математик рассудит по-другому.

Ведь «математического ожидания» вы отнюдь не получите; вместо этого вы получите то ли ноль, то ли 100 долларов. Получить ноль явно обидно. Ну, а получить сто? Это-то хорошо? Да, конечно; но надо еще подумать: действительно ли вы, получив сто долларов, испытаете вдвое больше удовольствия, чем от получения сорока шести? Это далеко не очевидно...

Психолог исходит здесь из не сформулированного (и заведомо неверного, причем именно с точки зрения психологии) догмата о том, что получаемое человеком удовольствие находится в прямой (подчеркиваю: прямой) пропорциональной зависимости от полученной суммы. И, конечно, не учитывает обиды, которую испытает неудачник, который мог получить деньги, а вместо этого получил шиш.

Он правильно применил формулу; но он забыл, что результат надо еще правильно истолковать.

* * *

Многие думают также, что математики – это люди, которые постоянно что-то вычисляют. Помнится, мой отец был сильно удивлен, обнаружив, что я умею считать интегралы гораздо хуже, чем он. И он тоже, хотя был достаточно сведущ в математике (он был физиком-теоретиком высокого класса), он тоже был уверен, что математик должен главным образом уметь вычислять. Конечно, такое умение непременно входит, как один из важнейших компонентов, в образование математика и в его «минимальный запас», но все же суть работы математика отнюдь не в этом.

Я бы даже сказал, что дело обстоит как раз наоборот.¹ Математик часто вынужден вычислять (об этом еще будет говориться ниже). Но он всегда стремится вычислять как можно меньше.

¹ В 1980-е годы мой друг прислал мне из Израиля калькулятор – по тогдашним понятиям, передовая техника. И пользовался ли я им?

Да, один раз. Он понадобился мне, когда я ездил со студентами на картошку, и мне нужно было рассчитать, кто из них сколько заработал. Конечно, я мог бы это сделать и с карандашиком, но складывать десятков чисел с калькулятором проще и надежнее, чем в столбик.

И это, повторяю, был единственный случай, когда я воспользовался калькулятором для дела, а не так просто, для развлечения. В своей математической деятельности мне им так и не пришлось воспользоваться: он не был мне нужен.

Тут весьма уместно припомнить характерную ошибку, сделанную при переводе «Очерков по истории математики» (одного из томов фундаментального труда Н.Бурбаки).

Последняя (и следовательно, особенно важная) фраза книги в переводе заканчивается словами:

«... которые, подобно всем великим математикам, стремились заменить *идеи* – *вычислениями*».

Ошибка переводчика (или, что вероятнее, редакторов и корректоров) состоит в том, что два ключевых слова поменялись местами. В оригинале говорилось: «...заменить *вычисления* – *идеями*».

Ошибка не случайная, ох, не случайная! Она, как и обмолвка генералов, показывает, какая пропасть лежит между математикой – и досужими представлениями о ней.

Математика и Буратино

Алексей Толстой не любил математику. Ее не любит ни Буратино (о глубоком философском смысле диалога Буратино с Мальвиной я поговорю чуть ниже), ни герой автобиографической повести «Детство Никиты», который с тоской представляет себе того купца, который купил (или продал) столько-то аршин синего и черного сукна; или те поезда, которые вышли из пунктов А и В, чтобы встретиться на расстоянии $3/4$ от А... Да. Мнение о том, что математика – очень скучная наука – не то чтобы доминирующее, но достаточно распространенное. Сплошные бассейны, в которые вода через одну трубу вливается, а в то же время (непонятно зачем) выливается через другую...

Я мог бы возразить, что на математических олимпиадах очень часто даются задачи с весьма занятными формулировками: «Короли ездили друг к другу пировать, а вечером слуги развозили их по домам...» «Мудрый таракан решил отыскать Истину...» Но вначале позвольте мне защитить именно «математическую скуку»: в ней заложен глубокий научный смысл.

Если нам предлагается решить скучную задачу о том, как купец продал 138 аршин синего и черного сукна за 477 рублей, причем синее стоило 5 руб. за аршин, а черное – три... здесь нам не требуется знать, не было ли это сукно, случайно, гнилым. Неважно и то, у кого купец его перед этим купил и какую прибыль получил (это, впрочем, могло бы стать темой другой задачи – но именно ДРУГОЙ).

Поэтому перед тем, как поговорить о задачах с увлекательными (или, по крайней мере, с занятыми) формулировками,

признаём, что хулители в немалой степени правы. Большинство математических задач по формулировке скучны; но отчего?

Вспомним, как «девочка с голубыми волосами» пытается учить Буратино математике. Результат, что называется, «значительно ниже среднего»:

«— У вас в кармане два яблока...

Буратино полез в карман.

— Врете, ни одного.

— Я говорю, — терпеливо продолжала девочка, — предположим, у вас в кармане два яблока. Некто взял у вас одно яблоко. Сколько у вас осталось?

— Два.

— Подумайте хорошенько.

Буратино сморщился — так он здорово подумал.

— Два.

— Почему же?

— Я же не отдам Некту яблока, хоть он дерись!

— У вас нет никаких способностей к математике, — огорченно сказала девочка...»

*(А. Толстой. «Золотой ключик,
или приключения Буратино»)*

Мальвина права: своим ответом Буратино продемонстрировал свою неспособность отвлечься от конкретной ситуации. Математика всегда основана на «предположим это», и обсуждать вопрос «а почему бы не предположить другое», не принято.²

В качестве иллюстрации к моему тезису приведу очередной анекдот.

• Корреспондент спрашивает директора сумасшедшего дома, как врачи проверяют, действительно ли пациент излечился. Директор отвечает:

— Мы напускаем полную ванну воды, кладем рядом чайную ложечку, рядом ставим кружку и предлагаем освободить ванну от воды.

Корреспондент. Ну, понятно: всякий нормальный человек возьмет кружку.

² Правда, знаменитый английский математик Дж. Литлвуд приводил такой пример:

«**Учитель.** Предположим, что x есть число овец. — **Ученик.** Но, господин учитель, предположим, что x не есть число овец. — Я спросил у Витгенштейна, имеет ли эта шутка глубокий философский смысл, и он ответил, что имеет». («Математическая смесь»).

Но, во всяком случае, математического смысла шутка, вроде бы, не имеет.

Директор. Нет. Нормальный человек вынет пробку

Этот анекдот неплохо иллюстрирует суть математического подхода к проблеме. Дело в том, что математик-то как раз поступит, вероятнее всего, как предлагал корреспондент: возьмет кружку. Ведь математик привык решать задачи, в которых круг допустимых средств жестко ограничен (и это важно!) А в задаче не сказано: разрешается ли вынимать пробку. Значит, наверно, нельзя.

В математике всегда говорится: «дано то-то и то-то. Какие из этого можно сделать выводы?»

Вообще говоря, из этого можно сделать множество разнообразных выводов (что и делает Буратино, проявляя тем свою отвагу, но уж никак не математический талант). И если мы хотим получить определенный вывод, нам необходимо прежде всего отбросить все посторонние соображения. Данный случай показывает это достаточно отчетливо.

В реальной ситуации не мешало бы знать и то, большие ли яблоки лежат в кармане или маленькие; и кто такой этот Некто, и каким путем он взял яблоко – попросил, потребовал или просто украл. В последнем случае надо не считать оставшиеся яблоки, а надавать ему по шее, что и предлагает сделать персонаж другой детской повести.

«– Слушай, – говорю, – мальчик и девочка собрали вместе 120 орехов, мальчик взял вдвое больше. Что надо делать, по-твоему?

– Надавать, – говорит, – ему по шее, чтоб не обижал девочек!

– Да нет, я не о том...»

Это ключевая фраза для понимания математики как науки; она всегда «не о том». Но послушаем беседу мальчиков дальше.

«– Да нет, я не о том. Как разделить, чтобы у него было вдвое?

– Да что ты ко мне пристал? Пусть делят, как хотят. Пусть поровну делят.

– Да нельзя им поровну. Это задача такая.

– Какая еще задача?

– Ну, задача по арифметике.

– Тьфу! – говорит Шишкин. – У меня морская свинка сдохла, я ее только вчера купил, а он тут с задачами лезет!»

(Н. Носов. «Витя Малеев в школе и дома»)

Этот разговор, так же как и разговор Буратино с Мальвиной, имеет глубокий философский смысл. Советы Кости Шишкина

(«надавать по шее»; «пусть поровну делят») вполне разумны с общечеловеческой точки зрения, но для задачи никак не подходят. И, соответственно, позиция Вити Малеева («как разделить, чтобы у него было вдвое?») никак не сообразуется с жизненной мудростью. В самом деле, зачем им делить так, чтобы было вдвое? Витя и Костя говорят на разных языках.

После того, как сказано «дано то-то и то-то» – то, что дано, уже не обсуждается. Эти условия можно и должно обсуждать либо ДО, либо ПОСЛЕ того, как задача решена. Но не в процессе решения. Первое, чему необходимо научиться, занимаясь математикой – искусству полностью забыть о нематематическом содержании задачи, оставить от жизненной ситуации лишь голый скелет формальных данных. Неспециалист скажет: видите, какая математика скверная, как она оторвана от жизни... Отнюдь! Просто это лишь половина дела, и притом *вторая* половина; для настоящих занятий математикой необходимо предварительно уметь в обычной жизненной ситуации понять: можно ли здесь вообще применить математику?

Очень часто это возможно – поскольку математический аппарат очень разнообразен, могуч, и «школьная математика» дает представление о реальных возможностях математики не большее, чем капля воды – об Атлантическом океане. И к очень многим ситуациям можно тем или иным боком присобачить математическую теорию (или создать новую математическую теорию, специально для этой ситуации), затем выделить чистую математическую задачу – и уж потом переходить ко второй части: решение этой задачи. Как заметил У.Сойер, «математику надо все объяснять, как ребенку или Сократу» («Прелюдия к математике»). Но научить *этой* – как выделить математическую сторону в ситуации, где математикой вроде бы и не пахнет, – много трудней, чем решить задачу про бассейн с двумя трубами. И школа, вполне естественно и разумно, начинает с того, что легче.

Школьнику же остается задача попроще: вышелушить математическое ядро задачи там, где оно уже почти видно.

Но и здесь это не совсем тривиально. И чем скучнее условие задачи – тем легче это сделать. Унылые, однообразные условия задач даются именно для того, чтобы это было легче.

А теперь – как обстоит дело на олимпиадах? Математическая олимпиада – совсем другой случай. Туда приходят люди, для которых вышелушить математическое содержание – проще простого, как бы замысловато задача ни была сформулирована. И для них необходимость понять чисто математическое содержание

задачи, исключив из нее мудрого таракана и королей, — не в тягость, а в радость. Это некий дополнительный аттракцион.

Это примерно так же, как в анекдотах: в них обычно что-то не договаривается. Дело не в том, что догадаться о недоговоренном трудно — наоборот, это очень легко. И рассказывающий и слушающий улыбаются друг другу улыбкой авгуров, «посвященных» в недоговоренное.

* * *

Но как же на самом деле работают математики?

Иной раз представляют дело так: для математики, дескать, нужно, чтоб все было просто: «тут белые, там черные, по эту сторону свободные, по ту — рабы», а жизнь, мол, сложнее.

Так ли это? Отчасти.

Действительно, математики хотят иметь теории попроще и ценят такие теории. Однако работает математик все-таки совершенно иначе. Поскольку приходится, хочешь не хочешь, опираться на факты. Да, вначале он обычно строит какую-нибудь совсем простую рабочую гипотезу; но тут же выясняется, что факты ей противоречат. Он начинает ее менять. Даже пиджак шьется не с одной примерки — а тут все много сложнее. Переделываешь раз, другой, третий. На десятый раз начинаешь примерно понимать, какая именно теория имеет шанс оказаться верной — причем обычно нечто совершенно непохожее на то, что собирался сделать: думал, что шьешь штаны, а вышла штормовка.

И все-таки при этом теория должна быть простой. Под очень сложную теорию можно подогнать все, что угодно (появился новый факт — вводишь в основное уравнение еще один член); но слишком сложная теория никому не нужна. Вот и вертись, как знаешь.

Можно еще это изобразить таким образом: допустим, есть ряд экспериментальных точек, и надо придумать кривую, на которую они все, хотя бы приблизительно, ложатся.

Вообще-то есть совсем простая теорема, которая гласит: для любого набора точек существует многочлен, на графике которого все они лежат. Ну так что: берем этот многочлен, и вперед? Как бы не так!

Берем сначала две точки и бодро проводим через них прямую (иначе говоря, строим график многочлена 1 степени). Но третья точка, вот досада, на график не попадает. Не беда: вместо прямой возьмем параболу (вместо уравнения первой степени — уравнение второй) и проведем ее через 3 точки.

Но для четвертой придется брать уравнение третьей степени, потом четвертой, и так далее. Для 40 точек придется взять уравнение 39-й степени. Однако мало того, что его долго вычислять, главное – даже уравнение 9-й степени, не говоря уж о 39-й, никому не нужно.

Начинаем химичить. Будем считать, что измерения проведены неточно, и теория тоже не совсем точная – значит, пусть искомая кривая пройдет не через наши точки, а поблизости от них. Вот эти две точки, которые не лезут ни в какие ворота – долой; условимся, что они из другой науки. После этого попробуем подобрать что-то приемлемое... А потом понимаешь, что точки довольно хорошо лягут на кривую, – но надо брать не многочлен, а сумму трех синусоид. Впрочем, две точки все-таки придется выбросить... Только не те, которые я выбрасывал раньше, а две другие.

Вот примерно так и работаем. А вы говорите «простая теория»...

Зачем нужно уметь считать?

Г-жа Простакова (*Правдину*). Как, батюшка, назвал ты науку-то?

Правдин. География.

Г-жа Простакова (*Митрофану*). Слышишь, еорграфия.

Митрофан. Да что такое! Господи боже мой! Пристали с ножом к горлу.

Г-жа Простакова (*Правдину*). И ведомо, батюшка. Да скажи ему, сделай милость, какая это наука-то, он ее и расскажет.

Правдин. Описание земли.

Г-жа Простакова (*Стародуму*). А к чему бы это служило на первый случай?

Стародум. На первый случай сгодилось бы и к тому, что ежели б случилось ехать, так знаешь, куда едешь.

Г-жа Простакова. Ах, мой батюшка! Да извозчики-то на что ж? Это их дело. Это-таки и наука-то не дворянская. Дворянин только скажи: повези меня туда, свезут, куда изволишь. Мне поверь, батюшка, что, конечно, то вздор, чего не знает Митрофанушка.

(*Д. Фонвизин. «Недоросль»*)

Выше я сказал о том, что математики стараются считать поменьше. Теперь я хочу выдвинуть дополнительный тезис: всем не математикам (не только физикам) необходимо *уметь считать*. Или, говоря точнее, – уметь работать с цифрами.

Ведь очень многие склонны думать, что такое умение требу-

ется только математикам (ну, может быть, физикам, или еще в каких-то точных науках). Во всех прочих случаях, если нужны цифры – то «извозчик довезет», пусть кто-нибудь сосчитает за нас.

А результат получается печальный: они приводят цифры, но не понимают, что именно из этих цифр можно извлечь. Притом – подчеркну – речь отнюдь не о том, что математики обладают какими-то особенно хитрыми приемами, позволяющими извлечь из имеющихся цифр нечто, недоступное простым смертным. Да, такие приемы действительно существуют, математики ими владеют и изредка применяют. Но, как правило, речь идет о совершенно элементарном умении не просто смотреть на цифры, а сопоставлять их. Здесь не требуется знание специальных разделов математики. А требуется некое владение духом математики – т.е. тем, что необходимо каждому человеку.

Приведу несколько примеров.

- Американская исследовательница Энн Эплбаум в своей книге о ГУЛаге приводит данные о числе его узников.

Данные, надо сказать, достаточно удивительные.

Во-первых, эти цифры заметно меньше тех, которые мы привыкли считать оценочными. Согласно этим данным, в начале 1930-х годов общее число узников ГУЛага составляло около 300 тысяч, и дальше росло медленно, но верно. (Кстати сказать, в 1937 году не было какого-то резкого скачка; цифра выросла, да, но не так уж заметно.) Максимум был достигнут в 1953 году – несколько больше 2,5 миллионов. Кстати, это примерно равняется числу заключенных в тюрьмах США в наши дни (правда, надо сделать поправку: население США примерно вдвое больше, следовательно, процент заключенных в нынешних США примерно вдвое меньше).

Но более странно другое. Суммируя число заключенных по годам (этого мисс Эплбаум не сосчитала), мы получаем приблизительно 36 миллионов. Между тем она пишет, что общее число людей составляет примерно 18 миллионов.

Расхождение? Да. Но совсем не в ту сторону, как кажется на первый взгляд. Первая цифра и должна быть заметно больше: ведь человек, просидевший, скажем, 8 лет, в первом случае учитывается 8 раз.

А вышло, что каждый заключенный ГУЛага учитывался в среднем только два раза.

Отсюда математически неизбежный вывод: либо цифры фальшивые, либо средний срок заключения составлял около 2 лет.

Предположим, что цифры не фальшивые (это предположение косвенно подтверждается тем фактом, что мисс Эплбаум, во всяком

случае, НЕ стремилась оправдывать советский режим). Тогда – как их объяснить?

Может быть, высокой смертностью? Нет. Конечно, высокая смертность несколько корректирует эти цифры, но «списать» это противоречие на ее счет, как легко сосчитать, не удастся. (Для того, чтобы объяснить такую ситуацию только высокой смертностью, нужно было бы, чтобы по крайней мере 80% заключенных умирало в течение первого года, а реальная цифра заведомо меньше в несколько раз – или даже в десятки раз.)

Между тем буквально все авторы пишут, что все сроки составляли 8–10 лет и более; о ком ни прочтешь – узнаешь, что он провел в лагерях 10 лет и более. Даже делая поправку на «добросовестность» сегодняшних журналистов, трудно сделать так, чтобы данные сходились.

По моей грубой прикидке, высокая смертность в лагерях может «сблизить» две приведенные цифры – 10 лет (обычные сроки) и 2 года (цифра, выведенная выше) процентов на 20, может быть – 30. От силы – 50, но это уж с колоссальными натяжками. Так или иначе, требуется еще и другое, дополнительное объяснение.

Может быть, оно состоит в том, что «астрономические» сроки относятся к известным людям (старым большевикам, или интеллигенции, и т.п.), тогда как простых людей и воров выпускали быстро.

Я говорю «возможно»; никак не настаиваю на такой версии. Для целей настоящей статьи важно другое: *никого эти расхождения в цифрах не смущают*. Зачем «дворянину» знать математику? Или хотя бы арифметику?

И исследователи приводят очень интересные цифры, решительно не понимая, что же из них можно извлечь.

Но оставим этот пример, где мы неизбежно оказываемся в лапах самой низменной политики. Рассмотрим другой пример, который сегодня не имеет уж ровно никакого политического подтекста; автора не обвинишь в том, что он нарочно, в каких-то низких целях, завысил или занизил цифры. Тем не менее...

● Вот данные о богатых и бедных дворянах в Российской империи. (Таблица взята из книги Б.Миронов. «Социальная история России», СПб, 2003; т. 1, стр. 89.)

И опять – автор книги не очень умеет считать, а вернее – не понимает, зачем нужно это уметь. В результате – в таблице есть странности.

А именно, рассмотрим частное от деления чисел четвертого столбца на соответствующие числа второго. Это частное показывает, сколько

**Стратификация дворянства Европейской России
без Польши и Финляндии в 1858 г.**

	Число дворян обоего пола		Число крепостных мужского пола у дворян	
	Тысяч	%	Тысяч	%
Личные	276,8	31,3	0	0
Потомственные	612,0	68,9		
Без земли и крепостных	33,9	3,8	0	0
С землей и крепостными	96,6	10,9	0	0
Без земли, с крепостными, до 4	16,8	1,9	12,0	0,1
Без земли, с крепостными, до 20	190,2	21,4	327,5	3,1
С землей и с крепостными, 20–100	164,5	18,5	1666,1	15,8
С землей и с крепостными, 101–500	92,4	10,4	3925,1	37,2
С землей и с крепостными, 501–1000	11,2	1,3	1569,9	14,9
С землей и с крепостными, >1000	6,4	0,7	3050,6	28,9
Итого	888,8	100	10551,2	100

крепостных в среднем приходится на одного дворянина малого, среднего или большого достатка.

Например, посмотрим, сколько же крепостных приходится на одного дворянина с 4-20 крестьянами. Делим 327,5 тысяч на 190,2 тысячи... так... выходит... это еще что?!

Выходит, что в среднем на помещика с 4–20 крестьянами приходится по 1,7 крепостного.

Это как понимать? Может быть, принять во внимание, что в таблице учтены только мужики, а не бабы? Увы, это не поможет; если даже допустить, что в первом столбце, в отличие от 4-го, учитывались крестьянки (а это не факт), то число лишь удвоится, выйдет 3,4 крепостных.

То же самое получается и дальше. На помещика с 20–100 крестьянами в среднем приходится по $1666:164 = 10,1$ крестьянина – вдвое меньше, чем допускает нижняя граница. И так далее.

Поразмыслив, я все-таки нашел правдоподобное объяснение этому парадоксу. Вероятно, помещики учтены ВСЕ – обоего пола и с учетом детей. Если принять, что в дворянской семье пять душ (скажем, помещик, жена и трое детей), и на каждого из них приходится эти самые 1,7 крепостного – то на всю семью приходилось в среднем 8,5 крепостных, что уже нормально укладывается в интервал от 4 до 20.

Возможно, именно так и было. Может быть, тут какое-то другое объяснение. Во всяком случае, автору безусловно следовало бы разъяснить этот момент.

Но автор совершенно не интересовался такими пустяками. Ему нужны цифры – он привел цифры. Ну, и хватит с вас...

Вот вам еще пример, на этот раз довольно грустный.

- Читаем бодрое сообщение (от 23.11.2010). Шапка: «ВИЧ в мире все меньше». Это ведь хорошо, не правда ли? Прочтем:

Количество новых случаев ВИЧ в мире снизилось с 3,1 миллиона в 2001 году до 2,6 миллиона в 2009 году, или на 19%, сообщил директор агентства ООН по борьбе со СПИДом. В настоящее время в мире живет 33,3 миллиона ВИЧ-инфицированных – на сто тысяч меньше, чем год назад.

Так вот, господа. Если заразилось 2,6 миллиона, а инфицированных стало меньше на 100 тысяч, то куда же делись 2,7 миллиона? Ответ, к сожалению, очевиден: умерли.

Однако этого журналисты не видят. И излагают эти печальные факты в мажорном духе.

- А вот обратный случай. Согласно сообщению пресс-службы Счетной палаты Украины, смертность в нашей стране «превышает соответствующие показатели в Европе в 3–5 раз...»

Более чем странно, если принять во внимание, что до сих пор смертность во всех странах составляла ровно 100%.

Конечно, и здесь можно обсуждать, как получилась такая удивительная цифра. Сказать, что смертность в настоящее время (именно в настоящее) вдвое выше? Тоже не получается, тоже цифирь не сходится. Потому что это должно было бы означать, что продолжительность жизни на Украине примерно в три раза меньше, чем в Европе; она действительно меньше, но никак не вдвое. Поэтому фактор продолжительности жизни может объяснить такой феномен лишь на 20–30%. А где остальные 70%?

Можно, конечно, допустить, что речь идет о случайном «всплеске» смертности. Но тогда он должен был бы привести к тому, что через год-два все нормализуется, и смертность на Украине станет примерно такой же, как в Европе (должна бы – меньше, но как сказано, надо учесть, что продолжительность жизни меньше).

А еще можно допустить, что играет роль такой фактор: значительная часть активного населения выехала на заработки. Их смертность (допустим) не учитывается. И в результате учитывается смертность только среди тех, кто остался, т.е. среди людей постарше. Это автоматически даст некоторое увеличение смертности – хотя опять-таки недостаточное, чтобы объяснить подобные цифры.

В общем, какие-то объяснения этим откровенно абсурдным цифрам придумать можно. Но вновь повторю: это никому не интересно. Прежде всего – потому, что никто не замечает абсурдности цифр.

До сих пор я говорил о том, что нематематики не умеют обращаться с цифрами. Но увы! И у людей, прямо связанных с математикой, есть проблемы.

- Знаменитый, а может быть, великий математик современности Терстон пишет в своей статье ³:

«Помню, как в пятом классе я пришел к поразившему меня пониманию, что ответ на вопрос «сколько будет 134 деленное на 29 » – просто $134/29$. Это же удивительно, от какого количества работы можно освободиться! Для меня деление 134 на 29 было утомительным заданием, тогда как за таким предметом, как $134/29$, никакого труда не стояло. В радостном возбуждении я прибежал к отцу и рассказал о своем замечательном открытии. Он мне ответил: да, да, конечно, так и есть: a/b и a , деленное на b – это просто синонимы. Для него это был всего лишь еще один вариант обозначений».

Мысль поучительная, но... способный мальчик-пятиклассник был не совсем прав. Он не понимал, что таким образом мы выигрываем в одном, чтобы потерять в другом. При таком обозначении вы, скажем, не очень ясно понимаете: а вот это самое число $134/29$ – оно, к примеру, больше трех или меньше? И по этому случаю хочу рассказать еще один анекдот. Опять «анекдот» в классическом смысле слова; на этот раз – из моих собственных наблюдений.

Когда-то я пытался давать на вступительных экзаменах в КПИ (т.е. в одном из лучших вузов Киева) несложную задачу «на пятерку». И потерпел полное поражение. Никто из претендентов на пятерку не знал, что с ней делать.

Задача такова.

Даны 4 положительных числа a , b , c , d . Рассматриваются три дроби: a/b , c/d и $(a+c)/(b+d)$.

Как они могут располагаться по возрастанию (и как – не могут)?

Ответ состоит в том, что третья дробь (она называется медианой) всегда находится посредине между двумя другими. Доказательство более чем элементарно, но... его не проходят в школе. Результат, как сказано, печален.

И причина, вероятно, именно в том, что школьники слишком много внимания уделяют формальным обозначениям и явно недостаточно понимают, что именно они должны обозначать.

Напоследок приведу еще два примера, где уже не будет никаких цифр, но суть проблемы та же. Оба взяты из книги Н.Константинова, в обоих идет речь – подчеркну это – о

³ Thurston. Переведено в журнале «Математическое просвещение», М, 2007:11

школьниках из специальных школ, глубоко изучавших математику и физику. И тем не менее...

- Как-то раз группа школьников плыла на лодках. Один из школьников захотел перепрыгнуть из одной лодки в другую, шедшую в кильватере следом. «Я просто подпрыгну, – объявил он, – и пока я поднимусь и опущусь, та лодка как раз подойдет».

А ведь ему рассказывали в школе об относительности движения. И был это не двоечник, не хорошист, а один из лучших и талантливейших школьников (других в константиновском лагере не было). Но он все равно был уверен: то, что он учит в школе – это так, наука, не имеющая отношения к реальности. И ему таки понадобилось подпрыгнуть и опуститься на то же место (то же, разумеется, в лодке; в неподвижной системе координат он двигался вниз по течению вместе с лодкой), чтобы понять, что *относительность движения есть физический факт*.

Другой подобный случай.

- Школьник оставил на берегу Белого моря свой рюкзак. Вернувшись, он с удивлением обнаружил, что его на берегу и близко нет. Украли? Нет; рюкзак стоял там же, где стоял. Но теперь он стоял в воде, далеко от берега. Ушел берег: начался прилив.

А ведь опять же – в школе он учил про приливы...

Зачем балерине математика?

Допустим, однако, что человек не собирается возиться с цифрами вообще. Ни извлекать из них что-либо, ни вообще что-то делать. Так, наверно, он прекрасно обойдется и без математики?

Обойтись – обойдется. Можно, как известно, обойтись без одной ноги (или даже без двух) и прожить жизнь; можно даже быть при этом счастливым. Но никто не станет спорить, что с обеими ногами как-то предпочтительней.

Так вот, зададим себе вопрос: зачем математика балерине или художнику? Неужели им так необходимо уметь решать квадратные неравенства?

Тут я для начала хочу привести точку зрения телекритика газеты «Известия» и возразить ей.

Ирина Петровская, критик, вообще-то, очень и очень неглупый, рассуждая о современной полу-развлекательной, полу-образовательной телепередаче («Известия», 22.02.2008), не удержалась, чтобы не лягнуть советскую систему образования.

«А на канале СТС с недавних пор существует свое интеллектуальное шоу под названием «Кто умнее пятиклассника?» Разного рода знаменитостям предлагают ответить на вопросы школьной программы 1–5 классов. Темы: литература, история, география, математика, природоведение... Подсказчиками выступают как раз пятиклассники, готовые прийти на помощь плавающей в школьной программе знаменитости. Тот, кто все-таки проваливает экзамен, должен публично признаться: «Я не умнее пятиклассника». Почти все произносят эту фразу еще до начала испытания. И это, в свою очередь, развенчивает миф о невероятной мощи советского школьного образования, якобы дававшего ученикам такой багаж знаний, что хоть ночью разбуди и спроси – от зубов отскакивать будет.

Да, вдалбливать знания в школе действительно умели. Вот только не задержались эти насильно вбитые знания в бедных головушках бывших советских школьников. А может, многие из них и не нужны были, вот время и стерло их из памяти словно ластиком. Но нынешним школярам по-прежнему приходится зубрить то, что в будущем им совершенно не пригодится...»

Аргументация, мягко говоря, сомнительная. И.Петровская не понимает, что идеал, к которому должна стремиться школа – в том, чтобы научить человека *учиться*; если он это умеет, то впоследствии всегда сумеет за несколько месяцев «доучить» то, что ему понадобится. Достигается ли этот идеал – другой вопрос; но важно понимать, что цель образования именно в этом, а совсем не в том, чтобы «вдолбить» знания, которые якобы пригодятся в дальнейшем.⁴

Не понимает она и того, что если большая часть полученных знаний потом благополучно выветривается из головы – тут нет беды. Большую часть знаний человек приобретает для того, чтобы потом забыть. Отчасти потому, что для того, чтобы запомнить хоть что-то – надо выучить вдесятеро больше (если выучите только необходимое – забудете из него девять десятых). А отчасти еще и потому, что в принципе **есть вещи, которые нужно выучить именно для того, чтобы потом забыть**.

⁴ Для примера: если вы хотите научиться решать неравенства или брать интегралы – вам необходимо решить много неравенств; взять много интегралов. Но вам нет никакой необходимости помнить решенные вами задачи – ни их решений, ни даже их условий. Все это выветривается из памяти – туда ему и дорога; вам же остается приобретенное искусство решать эти задачи.

Эта очень важная и глубокая мысль встретила меня в воспоминаниях Сергея Прокофьева. В них он, среди прочего, описывает свои занятия с Р.Глиэром, когда 27-летний композитор учил 10-летнего, но уже много обещавшего Сережу Прокофьева, и как Глиэр просветил его в отношении «квадрата», секвенций и отклонений в шестую ступень. Что это такое – для нас не особенно важно, скажу лишь, что «квадрат» – это построение музыкального произведения четверками: 4 такта, потом следующие 4, и так далее.

Однако музыканту (пишет Прокофьев) не следует слишком строго держаться квадрата; он вносит в мысль порядок, но если вся пьеса будет написана как $4 + 4 + 4$, то она станет монотонной, и $4 + 4 + 5$ повеет, как свежий воздух. Квадрат надо было выучить – а потом забыть. «Этого мне Глиэр не объяснил, может быть, потому, что сам неясно сознавал, и я надолго попал в объятья квадрата».

Это очень важная мысль.

Действительно, есть много вещей, которые надо не просто выучить, а выучить и потом забыть. Вот аналогия: говорят, что человеку надо прочесть 10 книг, но эти 10 книг надо искать всю жизнь. Это не означает, что остальные действительно можно не читать. Это значит, что надо прочесть очень много других книг, после чего (но только после этого!!) ты поймешь, что это все – не обязательно. Это можно уже забыть. Но все равно все эти знания остаются где-то в подкорке.⁵

Вернемся, однако, к нашей балерине. Наверно, многие со мной согласятся, что и ей (как каждому из нас) следует знать побольше. Большинство моих современников с этим тезисом, конечно, не согласны – но эти люди читать мою статью не будут, а потому и я могу их мнение игнорировать; моих же читателей, я полагаю, убеждать в этом – значит ломиться в открытую дверь. Но мои читатели выдвинули иное возражение: конечно, балерине тоже нужно знать побольше (в частности – чтобы потом забыть), но всего ведь все равно не выучишь. Зачем же ей математика, именно математика? Может быть, пусть лучше учит, чтобы забыть, что-нибудь другое?

На такую постановку вопроса, вообще говоря, ответить нечего: есть и другие полезные вещи. Но есть вещи, входящие в обязательный культурный багаж – об этом речь пойдет ниже

⁵ Во времена Низами, чтобы стать поэтом, нужно было знать на память столько-то тысяч строк классиков, столько-то – современников; а сверх того, требовалось еще знать наизусть и забыть 10 000 строк – чтобы они порождали подтекст.

– и сверх того, есть вещи, которые необходимы всякому. И прежде всего – это некоторые свойства души.

Потому позвольте мне поговорить немного подробнее о тех вещах, которые вполне можно забыть, но с которыми надо ознакомиться – и потом всю жизнь держать в подкорке.

Математические понятия

Лет 30 назад в мехматской стенгазете была опубликована статья о Всесоюзной алгебраической конференции «Кольца и модули». Она начиналась со слов о том, что плакат на местном вокзале с названием конференции вызвал некоторое смущение, поскольку «хотя что такое кольцо, знает каждый, то о модулях знают лишь те, кто еще помнит программу шестого класса...»⁶

И в самом деле: считается, что культурный человек не может не знать, кто такая Мона Лиза и что Героическую симфонию написал Бетховен, а не Моцарт. В то же время предполагается, что культурному человеку вовсе не обязательно знать, что такое кольцо, или что такое дифференциальное уравнение. Это не входит в «обязательный багаж».

Я охотно соглашаюсь с первой половиной, которая является (или, увы, являлась до недавнего времени) общепризнанной, но не могу согласиться со вторым. Дело, разумеется, не в том, чтобы непременно выучить какие-то формулы, или чтобы знать, как именно решается КдФ-уравнение⁷ – этого, в самом деле, знать не обязательно (я и сам-то не знаю).

Можно не знать, как именно решать дифференциальные уравнения и как следует работать с бесконечно малыми. Но понимать, что это такое, необходимо.

Необходимо знать, что такое «общее положение»; что такое контрпример, зачем он нужен и как он строится.

Не пытаясь представить читателю какую-то общую картину, я ограничусь тремя-четырьмя этюдами на эту тему.

С точки зрения методики преподавания мне, вероятно, следовало бы начать с темы «доказательства, контрпример и понятие общего положения». Но эти вещи немного навязли в зубах, и я хочу начать с философии матанализа и философии диффузов.

⁶ Несведущим читателям поясню: это была шутка. На самом деле и кольцо, и модуль – не те, о которых знают все или хотя бы все шестиклассники; это понятия из современной алгебры, довольно простые, но все же входящие в университетский, а не школьный «багаж знаний».

⁷ Уравнение Кортевега-де-Фриза, описывающее распространение волн в мелком бассейне.

Да, каждый раздел математики имеет некую собственную философию. Философия алгебры состоит в том, что надо изучать инварианты; философия теории вероятностей – в том, что маловероятные события не происходят. А вот названные мной науки... с них и начнем.

Математический анализ и дифференциальные уравнения

Философия математического анализа – в том, что *все происходящее – приблизительно линейно*. Знаем ли мы это? Да, это знает каждый. Каждый уверен в том, что если он будет идти не один час, а два, то пройдет вдвое большее расстояние; если получит в полтора раза денег, то и купит в полтора раза больше, и так далее, и тому подобное.

И поэтому, пожалуй, важнее обсудить даже не то, почему это верно (это, повторю, и так все знают), а как раз обратное: почему это неверно.

Допустим, вы – американский пионер XVIII века, вышли в густой лес, где решили заложить свое жилье. Вы вырубаете участок, чтобы поставить там свой дом, и еще участок – чтобы засеять поле. Поставили; засеяли; сняли урожай.

Допустим теперь, что на следующий год у вас появились дополнительные силы, дополнительные рабочие руки, и вы решили: вам есть смысл вдвое увеличить свой участок, чтобы получить урожай вдвое больше.

Каким будет результат? Да именно таким он и будет (есть, конечно, разные привходящие обстоятельства, вроде возможной засухи или, наоборот, благоприятной погоды, которая вам даст урожай не вдвое, а втрое больше – но это не имеет к делу отношения; это вы предвидели заранее). Результат линейно или приблизительно линейно зависит от вложенных усилий и расходов.

Но если вы продолжаете увеличивать вырубки – что тогда?

Тогда через некоторое время вы неожиданно для себя обнаружите, что климат местности стал меняться. Что ручьи пересохли, и поля страдают от засухи. Что начались пыльные бури... да мало ли что еще. Словом, возникли внушительные *нелинейные эффекты*, которые были совершенно незаметны до сих пор. «Линейный» подход оказался непригодным, когда изменения слишком велики.

Понимать это чрезвычайно важно. Но теперь (вернемся назад) давайте поймем и другое: «линейная философия», т.е. философия матанализа, тем не менее очень часто позволяет правильно смотреть на вещи, она крайне полезна. Но совершенно

необходимо также понимать, что именно вы делаете, когда предсказываете «линейный» эффект – и понимать, до каких пор ваш расчет достаточно разумен, обоснован – и где он становится весьма опасен.

К примеру: что будет, если продолжать выкачивать из недр Земли газ и нефть? Все считают, что будет то же самое, что и сейчас, только лучше; хорошо бы выкачивать еще больше, чтобы нам жилось лучше.

Между тем, вроде бы, всякому понятно, что запасы нефти и газа в природе ограничены. Тем не менее все политики твердо уверены, что надо продолжать добывать больше нефти, больше газа. А что будет, когда все выкачаем? А, оставьте; нам не до этого. Мы живем «линейно»: сегодня качаем 100 миллионов баррелей, завтра будем качать 150 миллионов, и будем жить в полтора раза лучше...

Но не будем говорить о грустном и постараемся понять хотя бы, что следует делать, если «линейная философия», философия матанализа, дает сбой.

Как быть тогда? Тут может помочь *практика (уже не философия) диффузов*. Наука об обыкновенных дифференциальных уравнениях как раз изучает, как протекают процессы во времени. И она говорит, что мы можем предсказать течение процесса в целом, если знаем, как он протекает в малом. Это уже не анализ (анализ дает примитивный, хотя и очень полезный прогноз: все будет линейно), это более совершенный способ изучения. Как всякий более совершенный способ, он имеет тот минус, что каждый случай надо рассматривать по отдельности (в анализе все всегда одинаково), да к тому же в большинстве случаев оказывается, что составить дифференциальное уравнение кое-как удастся, но решить его нельзя.⁸

Иногда решить уравнение удастся. Простейший пример такого рода – процесс ядерного распада. Мы знаем, что за очень короткий срок распадается определенная доля атомов, скажем, урана-238 (для урана-235 верно то же, но доля распадающихся атомов другая).

Это – то, что происходит «в малом», скажем, за долю секунды. Отсюда можно вывести, что количество оставшегося урана будет убывать по экспоненте, т.е. нужно определенное

⁸ «Если математику задают вопрос, будет ли устойчивым стол на четырех ножках, он довольно быстро принесет вам первые результаты – касающиеся стола с одной ножкой и стола с бесконечным числом ножек. Всю остальную жизнь он безуспешно пытается решить задачу о столе с произвольным числом ножек». (*Литлвуд*)

время, чтобы от имеющегося количества осталась половина; ровно столько же для того, чтобы от этой половины осталась половина (т.е. одна четверть исходного количества), потом половина от этого, и т.д.

Значительно сложнее явление солитона, для которого было совсем непросто и написать дифференциальное уравнение, а уж тем более – разобраться с его решениями.

Тем не менее на первом, самом примитивном уровне, можно говорить, что и здесь то же самое: мы знаем, что именно происходит за минимальный отрезок времени (скажем – за долю секунды), и поэтому мы можем предсказать поведение волны надолго вперед.

И вот такие вещи обязан понимать каждый.

Пределы

Отступим немного назад. Дифференциальное уравнение – вещь непростая. Предел, вроде бы, намного проще: понятие предела изучается в школе. Школьники что-то выучивают... и ничегошеньки не понимают. (Я сам-то только совсем недавно понял, что это такое – и спешу поделиться с читателем.)

Несколько лет назад я вел дискуссию с математиком К. Он утверждал, что из школьной программы вполне можно выбросить теорию пределов – ведь «всем понятно, что производная – это просто-напросто касательная».

Я возразил: касательная – ладно, а как быть с рядами?

К: Так что же? Можно прекрасно сосчитать сумму геометрической прогрессии алгебраическими методами.

Я: Ну нет. А число e ?

И вот тут-то до меня дошло, что самое вредное, что можно сделать – это привить человеку мысль, будто сумму ряда можно сосчитать.

Наоборот. Он должен понимать, что в абсолютном большинстве случаев (для того же числа $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$) единственное, что можно сделать – это «вручную» сложить достаточно много членов, а потом бросить это занятие и сказать, что мы вычислили сумму ряда довольно точно.

Точно так же, в большинстве случаев, вычисляется предел. Тут, конечно, возникает масса тонкостей – скажем, лучше было бы не просто «бросить» сложение членов ряда, а сверх того еще приблизительно оценить сумму оставшихся, и тому подобное... но эти тонкости уже, и в самом деле, балерине или даже физику знать не обязательно. Но каждому надо понимать, что предел

последовательности – это «на самом деле» просто-напросто его достаточно далекий член, а сумма ряда – это сумма его первых десяти (может быть, ста или двухсот) членов.

Неточно? Конечно, неточно. Но для того чтобы понимать, как устроен мир, надо иметь в голове именно его неточную картину; точная уж слишком сложна.

Неравенства и теоремы о среднем

А еще есть такая наука: теория неравенств. Она вполне элементарна, ее изучают не в университетах, а в школах. Но недостаточно объясняют, зачем она нужна.

Для начала приведу один совсем простой пример.

Утверждение. *Если дано некоторое множество чисел, оно разбито на подмножества, и среднее значение в каждой группе меньше A , то и среднее значение по всему множеству меньше A .*

Очевидно?

Для всякого, кто понимает, – очевидно.⁹

Для любого выпускника средней школы – трудная задача. И трудна она именно потому, что у него нет ни понимания о том, что такое «среднее», ни представления о том, что наука и жизнь как-то между собой связаны.

А зачем такие вещи нужны?

Ну, хотя бы для того, чтобы на важных заседаниях не произносились с умным видом слова: «к сожалению, имеются еще недостатки, к примеру, в 9 областях наши показатели ниже, чем в среднем по стране...»

Или чтобы не оказывалось, что такие-то области в прошлом году были передовыми, а теперь, к сожалению, отстают...

● Пример из жизни: с ученым видом сообщают, что в прошлом году Полтавская область была по темпам роста на 21-м месте (т.е. среди наихудших), а в нынешнем достигла огромного успеха, перейдя на второе место.

Это что: резкое улучшение ситуации? – Ничего подобного. Это значит, что область начинала с очень низких показателей, и благодаря

⁹ Для тех, кого смущает абстрактная формулировка, приведу другую, в точности равносильную. **В мире есть много стран, но в каждой стране средняя зарплата меньше 100 долларов в месяц. Тогда и по всему миру средняя зарплата меньше 100 долларов.**

Или еще один вариант, опять-таки строго равносильный. **В мире есть много стран, средняя зарплата в мире больше 100 долларов в месяц. Тогда есть хотя бы одна страна, в которой средняя зарплата тоже больше 100 долларов в месяц.**

этому ее небольшой прогресс сразу дал «высокие» темпы роста. А другие области, те, которые добились прогресса раньше – те исчерпали резервы роста, и теперь уже растут медленнее, оказываются на «плохих» местах.

Знание тонких фактов и методов решения неравенств совершенно не обязательно. Но знать, во сколько раз отличаются, к примеру, разные расстояния, необходимо. Иначе получается то, что мне пришлось однажды читать в газете:

«... Крым есть замечательная точка Земли, поскольку именно на Крым льется с расстояния 15 000 световых лет непрерывный поток информации из Космоса...»

Писавший явно не представлял себе, что такое неравенства. Прикиньте, пожалуйста, размеры Крыма и световые годы.¹⁰

Перейдем к другому, но тесно связанному с первым вопросу. Что такое «среднее»? Вы уверены, что вы знаете это?

К примеру: известно, что мужчины, в общем, выше женщин. Это известно всякому. А вот что именно это означает?

Что каждый мужчина, даже самый низкорослый, выше самой высокой женщины? Разумеется, нет.

А что же? То, что мужчины выше «в среднем». А что это означает – «в среднем»?

Что средний рост мужчины больше, чем средний рост женщины? Пожалуй, так... Вот только нехорошо, что нельзя понять, что такое «средний рост». Надо ли, к примеру, учитывать младенцев? (Вероятно, нет.) А 15-летних? Где граница?

А может быть, вообще надо говорить не о усредненном росте, а о так называемой медиане: выбрать из всех мужчин одного мужчину среднего роста (т.е. такого, что ровно половина мужчин выше его и половина – ниже), соответственно выбрать женщину среднего роста – и сравнить?

Или брать по-другому? Счесть, что «среднее» значение – это значение, которое встречается чаще всего? Среднее геометрическое? Среднее гармоническое? Или, может быть, взвешенное среднее, о котором речь пойдет чуть ниже?

Мне, вероятно, скажут: стоит ли так разбираться? – В данном вопросе, бесспорно, не стоит. А если речь идет не о таком академическом вопросе, как «средний рост мужчин», а о среднем росте цен на товары? Тогда как его вычислять, и что правильнее?

¹⁰ Для справки: 1 световой год составляет около 10 триллионов километров

Как известно, «средний» рост цен называется инфляцией (или индексом инфляции). Но дав ему название (или даже предложив формулу для его вычисления), мы никак не объяснили, что же это такое.

И в каком именно из перечисленных смыслов берется среднее: среднее арифметическое, среднее гармоническое или взвешенное среднее (т.е. среднее арифметическое, но с некоторыми коэффициентами «взвешивания»)?

На самом деле экономисты используют последнюю из перечисленных формул, причем коэффициенты вычисляют путем тщательного разглядывания потолка. Но правильный ответ о том, как вычислять инфляцию, таков: ни один из них, или же все сразу. То есть: ни один из этих показателей, строго говоря, не годится, величина не может быть измерена ОДНИМ числом, и надо пользоваться более сложными приемами.

Этого, однако, никто делать не будет, поскольку более сложные показатели не удастся вставить в пропагандистскую статью (хвалебную или хулительную – все равно).

Однако не надо и впадать в обратную крайность, и утверждать, что «ничего мы не знаем, и знать не можем». Нет. Именно в связи с проблемой «наилучшего среднего» стоит сказать, что в исключительно важном и очень часто встречающемся случае *нормального распределения* ВСЕ перечисленные выше показатели СОВПАДАЮТ. Иными словами – можно пользоваться любым из них, и все они хороши.

Не все безнадежно. Но и не все просто.

Алгебра. Инварианты. О множественности миров

Современная математика занимается в основном преобразованиями. И алгебра – тот раздел, который смотрит на них с позиции инвариантов.

Философия алгебры состоит в том, что надо изучать инварианты, т.е. то, что не меняется в ходе преобразований. Так сказать, «все меняется в этом мире, но есть и что-то прочное, неизменное; именно на это нетленное надо обращать внимание, все остальное – пустяки».

Конечно, этот подход – тоже ущербный; не только нетленное заслуживает внимания. Но поскольку алгебра – не вся математика, а только один крупный ее раздел, то такой подход более чем оправдан.

А что же такое «нетленное» в смысле алгебры?

Пример. В левый нижний угол шахматной доски 8×8 поставлено в форме квадрата 3×3 девять фишек. Фишка может

прыгать на свободное поле через рядом стоящую фишку, т.е. симметрично отражаться относительно ее центра (прыгать можно по вертикали, горизонтали и диагонали). Можно ли за некоторое количество таких ходов поставить все фишки вновь в форме квадрата 3×3 , но в другом углу?

Ответ: нет, невозможно. Дело в том, что вначале в нечетных рядах вначале стоит 6 шашек, тогда как если поставить фишки в верхний угол, то в нечетных рядах будет только 3 фишки. Но фишка прыгает из нечетного ряда только в нечетный (и никогда – в четный); раз вначале в нечетных рядах стояло 6 фишек – так оно и будет до конца времен.

Такова философия алгебры. А задачи алгебры совсем другие. Алгебра создает новые миры.

Их множество. Можно заниматься кольцом натуральных чисел; но можно вместо этого взять какое-нибудь глобальное кольцо. Этих колец бесчисленное множество; они в основном похожи друг на друга, но каждое имеет свои особенности, точно так же, как имеют свои особенности Франция, Германия или Италия – при том, что все они – крупные европейские страны, и в этом смысле противостоят Венесуэле или Китаю.

А можно взять уже кольца совсем другого типа: скажем, кольца Ли. Или изучать теорию луп. Продолжая приведенную аналогию, мы скажем, что это будут уже «алгебраический Китай», «алгебраическая Индия». И все это – отдельные миры.

Но...

Современная алгебра кое в чем похожа на жизнь во Вселенной. Планет много, но есть ли на них жизнь? Судя по всему – где-то, возможно, есть, но редко.

Сравнение покажется неожиданным, но сходство есть.

Современная алгебра (не путать со школьной алгеброй: школьная – тоже наука, тоже очень важная и полезная – но совсем другая, имеющая мало общего с современной) – наука, которая прежде всего учит четкости. Предельно ясно сказано, «что мы знаем – что требуется доказать».

А что именно мы знаем? Согласно философии современной алгебры, мы знаем некий набор аксиом. Отбросьте любую, замените ее чем-нибудь – и вы получите новую теорию, так сказать, новый мир.

Много миров. Но среди них очень мало разумных. Так же мало, как мало во Вселенной миров, где есть жизнь.

Вот потому-то по окончании доклада принято спрашивать

докладчика: «А зачем нужна эта теория?» И чаще всего оказывается, что она вовсе не нужна.

Помню, как на одном семинаре известный математик К. спрашивал у молодых докладчиков:

– Ну, а зачем нужен этот метод?

Докладчик: Сначала нужно его довести до совершенства.

К. (иронически): А уж после этого выбросить.

Смысл этой дискуссии в том, что нередко бывает именно так: математик (в особенности – алгебраист) сам придумывает задачу, сам придумывает для нее метод, который только для нее и годится... и тут, конечно, возникает вопрос: «а какая от этого польза?»

Еще одну иллюстрацию к этому принципу дает известный анекдот.

• Два воздухоплавателя отправились в путешествие на воздушном шаре. Вдруг – ураган, шар уносит неведомо куда, за тысячу миль. Наконец, ураган начинает стихать, шар уже не мчится, а просто летит очень быстро, и снизился настолько, что можно даже слышать, что происходит внизу.

Внизу идет какой-то человек; воздухоплаватели кричат ему:

– Э-эй! Где мы находимся?

Человек внизу после краткого раздумья отвечает:

– Вы находитесь на воздушном шаре.

Больше сказать они ничего не успевают, шар несет дальше. Один из воздухоплавателей говорит другому:

– По-моему, это был математик.

– А почему ты так думаешь?

– По трем причинам. Во-первых, он немного подумал, прежде чем ответить. Во-вторых, его ответ был абсолютно правильным. А в-третьих, совершенно непонятно, зачем такой ответ нужен.

И все же (эту притчу приводил Станислав Лем в своей знаменитой «Сумме технологии»), если вы сшили множество разных костюмов (с тремя рукавами, с восемью штанинами и так далее), то у вас возникает неплохой шанс найти кого-нибудь, кому один из ваших костюмов подойдет. Может быть, стрекозе или осьминогу, а может – глубоководной рыбе, которую еще никто не видел. Так было в истории математики много раз. Знаменитый немецкий математик Эдмунд Ландау (которого не надо путать со знаменитым советским физиком Львом Ландау) на вопрос о том, зачем нужна теория чисел, иронически отвечал:

– Как зачем? А диссертации?

Это был принципиальный ответ: математика не должна заниматься только тем, что «нужно». ¹¹ Но с другой стороны, в наши дни выяснилось, что Ландау был неправ: теория чисел оказалась совершенно необходима для построения надежных кодов.

Другой классический пример – матричное и тензорное исчисление: их придумали «просто так», а они оказались совершенно необходимыми для создания Общей теории относительности и квантовой механики.

Доказательство

Чему должна учить математика? Поставим вопрос несколько эже: чему должна учить человека школьная математика?

Прежде всего, разумеется – умению *думать* и *доказывать*.

То, что человеку необходимо умение доказывать – факт, очевидный не для всех, и к этому я вернусь чуть ниже. То, что необходимо умение думать – вероятно, можно принять без аргументации, но зато надо объяснить, почему речь идет именно о математике.

Ответ: просто потому, что математика дает в этом смысле самый благодарный материал.

Само собой разумеется, что учитель физики или другой точной науки также может и должен учить думать. И то же самое можно сказать даже об учителе литературы. Но в других науках гораздо больший акцент делается на других (тоже, разумеется, весьма полезных) качествах: память, фантазия. К примеру, в географии надо знать целый ряд фактов, которые ниоткуда не вытекают. То, что Джомолунгма – высочайшая из вершин мира, и что ее высота составляет столько-то метров – нельзя ни понять, ни объяснить. Можно только выучить.

В математике тоже есть факты, которые надо запомнить без объяснения (к примеру, ряд фактов из истории математики). Но мыслить надо все время, постоянно. Притом задачи есть на любой вкус, от совсем легких до трансцендентно трудных. Только трудись! Каждая наука развивает умение думать, но математика дает для этого самые лучшие возможности.

¹¹ О том же на много веков раньше говорил Евклид. Когда некий молодой человек спросил его, какая польза от геометрии, Евклид подозвал своего раба и презрительно сказал ему:

– Он ищет пользы. Дай ему медный грош.

Что же касается умения доказывать, тут, понятное дело, математика вне конкуренции. Но действительно ли человеку так это важно?

Разумеется, для 99,99% людей совершенно не обязательно знать, как именно доказывается, к примеру, формула Стирлинга. Но всякому нужно – хотя бы для того, чтобы не быть игрушкой в руках демагогов – понимать, что такое доказательство, и чем доказательство отличается от правдоподобного аргумента, а аргумент – от голословного утверждения, или демагогии.

И так как ничему нельзя научиться, не попробовав самому – так нельзя понять, что такое доказательство, не проведя его самостоятельно, пусть хотя бы на таком примитивном материале, как «в равнобедренном треугольнике высота и биссектриса совпадают»...

Да. Чтобы понять, что такое доказательство, надо самому научиться доказывать. Это лучше всего сделать в школе. Потом можно это умение забыть; без него большинство может обойтись. Но это тот самый случай, когда надо «научиться, чтобы потом забыть».

А теперь позвольте немного поговорить об обратной стороне доказательства: о теоремах существования.

Теоремы существования и контрпримеры

Доказательство утверждает: ВСЕГДА верно то-то (ну, скажем: диагонали ромба всегда перпендикулярны; не существует ромба, у которого угол между диагоналями равен 89°). Теорема существования (будь она верна) говорила бы, напротив: существует ромб с углом 89° ; имеется контрпример, вот он...

Зачем это нужно?

Сегодня очень модно издеваться над формулой «я Пастернака не читал, но осуждаю...»

В принципе эти издевки обоснованы. Но они (этого сейчас не желают понимать) обоснованы только в некоторых, довольно специальных обстоятельствах. А чаще всего подобная аналогия, напротив, доказывает лишь невысокий умственный уровень насмешника.

Отчего? Ну, я мог бы сослаться на ответную цитату. Из Михаила Булгакова:

- «– А вам мои стихи не нравятся?
- Ужасно не нравятся!
- А какие вы читали?

– Да никаких я не читал!

– А как же вы говорите?» – довольно резонно спрашивает Иван Бездомный. Но и Мастер не без оснований отвечает ему:

«– Ну так что ж такого! Будто я других не читал...»

(М.Булгаков. «Мастер и Маргарита»).

Этот аргумент многим покажется довольно убедительным. Но в действительности это – всего лишь цитата против цитаты.

Гораздо важнее то, что во многих обстоятельствах, действительно, мы **ИМЕЕМ ПРАВО**, не читая говорить: «Это – чушь».

Отчего? Да именно оттого, что есть такая вещь, как теоремы существования.

Если вам доказывают, что $11 = 12$ (есть такие софизмы), или если автор, к примеру, приводит решение задачи о трисекции угла, то я могу **НЕ ЧИТАЯ** сказать, что в решении есть ошибка.

«Где? – спросят меня. – Найдите ее и укажите!»

«Нет, – отвечаю я (и все математики поддержат меня безоговорочно). – Мне не нужно искать ошибку – я и так знаю, что она есть. У меня есть теорема о ее существовании. И нет ни малейшего желания копаться на десяти (а бывает, что и тридцати) страницах, выискивая, где именно автор поставил минус вместо плюса».

Тут справедлива, так сказать, «теорема существования ошибки». Можно привести целый ряд других примеров, где достаточно **ЗНАТЬ**, что такой-то объект существует; но для простоты остановимся только на возможности **ДОКАЗАТЬ** наличие ошибки, доказать, что такое-то доказательство, такой-то аргумент неверен даже не потому, что мы нашли в нем ошибку – он неверен априори, потому что быть верным он не может.

И попробуем эту аргументацию перенести из математики – в другие науки.

И мы увидим, что очень многие утверждения заведомо неверны.

Приведу пару примеров из истории.

Марк Твен в своем романе «Янки при дворе короля Артура» изображает средневековые темницы, в которых десятилетиями томятся узники.

Могло ли такое быть?

Нет. Ситуации, которую изобразил Марк Твен быть не могло.

А почему? Казалось бы, во-первых, можно привести примеры подобных узников. И темницы были (а в старинных замках и сохранились). А во-вторых, даже если б не так – мой тезис голословный, ведь я не могу доказать, что ни одного такого случая не было.

То и другое верно. И тем не менее я настаиваю на своем тезисе: такого быть не могло. И вот почему.

Если вы держите узника в тюрьме 10, 20 (не говорю уж: больше) лет... А за какие шиши?

Узники, изображенные в романе, – бедные люди. И, что еще важнее, – дело происходит в бедные времена. Кто же это будет хотя бы год кормить дармоеда; содержать тюремщика, который должен, хотя бы, принести ему еду; наконец, просто держать человека в клетке или камере, которую можно было бы использовать с толком?

Но ведь такие случаи были? – Да, и немало. Но все – не такие.

Часто случалось, к примеру, что знатного пленника держали – может быть, и долгие годы – ради выкупа. Бывало и так, что на выкуп не рассчитывали, а человека все-таки держали много лет в тюрьме: к примеру, французский король Людовик XI был сильно разгневан на своего бывшего любимого советника кардинала Балю, но пролить кровь прелата боялся – и засадил его в тюрьму на долгие годы. Но это уж случай особый.

А бедняка... Если он сильно проштрафился – его попросту вешали, или казнили более изощренным способом – но не держали в тюрьме. Если проштрафился не очень сильно – его можно было выпороть, или посадить в колодки. Это способ наказания – в отличие от тюрьмы.

После того, как европейцы обзавелись галерным флотом, казнить кого ни попадя перестали: к чему такой непроизводительный расход человеческого материала, когда можно его (этот материал) послать грести на галерах? Но и тут экономический смысл очевиден.

А что, простых людей так-таки и не сажали? – Сажали, а как же. Но ненадолго, и с практической целью: взять деньги (своего рода рэкет прошлых столетий). Если какой-то крестьянин – как предполагалось, зажиточный – не платил подать феодалу и ссылался на то, что денег нет ни гроша, – его сажали на неделю-другую в сырой подвал (я сам видел такие подвалы). Дня через три он обычно вспоминал, что деньги у него есть...

Думаю, из сказанного понятно, почему я, не имея под рукой решительно никаких исторических трудов, берусь утверждать: ситуация, описанная в романе, не могла иметь место.

Но то же можно сказать и о других ситуациях.

К примеру, сейчас очень популярно утверждение, что «в начале войны советские люди не имели особой охоты воевать, и только когда они увидели, что представляет собой Гитлер – ну, тут уже пошла иная, народная война...».

И здесь я, точно так же, без всяких материалов берусь утверждать, что это неверно. Мне не нужно искать ошибки в данных, которые

собрали историки. Достаточно того, что в утверждении есть явная логическая ошибка.

Можно ли допустить, что перелом в ходе войны был связан целиком, или хотя бы в основном с тем, что вначале люди воевать не хотели, а потом увидели истинное лицо нацизма?

Рассуждаем от противного: примем пока что этот тезис, как верный, и посмотрим, что из него вытекает.

А следствие очевидно. Кто именно увидел истинное лицо нацизма? Может быть, солдаты сибирских дивизий, переброшенные под Москву в декабре 1941-го?

А что именно они могли увидеть? Они знали о Гитлере только то, что им говорила советская пропаганда. Была ли эта пропаганда истинной или лживой – в контексте обсуждаемого вопроса не имеет ровно никакого значения. Либо они верили этой пропаганде – но тогда они должны были бы верить ей в июне 1941-го так же точно, как в ноябре. Либо они советской пропаганде раньше не доверяли – но тогда у них не было особых причин довериться ей осенью.

А вот жители оккупированной территории, напротив, видели и знали, каков новый порядок, уже не из сообщений радио, а непосредственно. Согласно этой логике, именно они должны были стать основной силой сопротивления нацизму.

Было так? Не было.

Партизанские отряды сыграли определенную роль в войне. Но (никто этого не оспаривает) роль эта была все-таки второстепенной. Кстати сказать, в истории случалось и иначе: когда Наполеон воевал в Испании, основной силой сопротивления стали именно испанские партизаны, и именно из-за них, а не из-за британского корпуса, Испания стала незаживающей язвой наполеоновской империи.

Но к войне 1941–1945 гг. это никак не подойдет. Здесь решающую роль сыграла регулярная армия, состоявшая из тех, кто, собственно говоря, нацистских зверств и не видел – по крайней мере, до тех пор, пока не началось масштабное контрнаступление. Но это масштабное контрнаступление началось уже в связи с переломом в ходе войны, т.е. после того, как произошло то, чего (по принятой нами теории) быть не должно.

Следовательно, теория неверна.

* * *

Контрпример – важнейшее понятие математической культуры, которое, кстати сказать, катастрофически недооценивается не только нематематиками, но также и профессиональными математиками.

В любой книге, в любом школьном или университетском

курсе излагаются теоремы «то-то верно» (подразумевается: «верно всегда, без исключений»). Но крайне редко вы встретите в книге утверждение «то-то верно не всегда – вот вам контрпример».

Приведу простенький пример.

● **Задача.** Выпуклое тело плавает в воде, причем 90% его объема находится под водой. Докажите, что не менее 60% его поверхности также находится под водой.

Решение. Задача неверна. Контрпримером является плоская коробка, плавающая таким образом, что над водой выступает только крышка и минимальная часть боковых поверхностей (согласно условию – менее 10% высоты). Если при этом высота намного меньше длины и ширины, условие задачи не выполнено, над водой находится почти 50% поверхности.

Заодно уж замечу: приведенный пример можно модифицировать так, чтобы над водой находилось даже больше 50% поверхности.

А вот вам совершенно иной пример контрпримера.

● **Утверждение.** *Многие математические теории – такие, например, как теория чисел – представляют интерес только для самих математиков, но не имеют и не могут иметь практических приложений.*

Контрпример. В XX веке оказалось, что теория кодирования – и, главное, практика кодирования – требует, к примеру, умения находить очень большие (порядка 10^{100}) простые числа. Это как раз одна из классических задач теории чисел.

Ждать приложений пришлось долго, но они появились.

Третий случай.

● Выше я говорил, что невозможно себе представить, чтобы простолюдина долго держали в тюрьме; что это бессмысленно.

А может быть, я все-таки ошибаюсь?

Ведь есть контрпример. Согласно Библии, Иосифа довольно долго держали в темнице, при том, что он был простым рабом, и не было никаких причин, почему бы его, как сказано, не казнить (или выпороть, или просто отпустить).

Конечно, я могу сослаться на то, что это – явная сказка, легенда.

Но ведь в легендах, как правило, реалии жизни отражаются правильно – если нет причин для противного.

Не знаю.

А вот еще один пример контрпримера.

• Дело было давно, лет 50, а может, и 60 тому назад. В Киеве проходил какой-то очередной диспут по генетике: генетики против лысенковцев.

Выступал один из сторонников Лысенко. Объясняя, почему приобретенные признаки могут и должны наследоваться, он привел примерно такой пример:

«Допустим, что на некоей делянке у елок систематически обрубают ветви. Такой опыт, конечно, трудно поставить – но если бы на протяжении ряда поколений так делали, то, несомненно, в конце концов елки стали бы иными: с короткими ветвями...»

На этом месте выступающего прервала реплика из зала. Известный киевский физик П. заявил:

«Такой эксперимент был поставлен. На протяжении многих поколений все женщины рождаются девственными».

Последовало полторы секунды молчания – пока слушатели соображали, что имел в виду П. – а затем взрыв хохота.

И напоследок – пример «доказательства существования».

• **Задача.** *Фома и Ерема делят кучу из 25 монет в 1, 2, 3, ..., 25 алтынов. На каждом ходу один из них выбирает монету из кучи, а другой говорит, кому ее отдать. Первый раз выбирает Фома, далее тот, у кого сейчас больше алтынов, при равенстве – тот же, кто в прошлый раз. Кто выиграет (получит больше денег, чем другой), если оба играют наилучшим образом?*

Найти наилучший способ игры («выигрышную стратегию») в этой игре достаточно сложно; по-видимому, даже и невозможно без применения компьютеров. Тем не менее ответить на вопрос задачи не так уж сложно. **Ответ:** выигрывает Ерема.

В самом деле, после первого хода один из игроков получил несколько алтынов, и он же выбирает монету. Обозначим этого игрока А, а другого В. Поскольку в игре нет ничьей (суммарное число денег нечетно), в этот момент либо у А, либо у В есть выигрышная стратегия. Но первым своим действием Ерема решает, кому из них быть в роли А, а кому – в роли В. Следовательно, у Еремы есть выигрышная стратегия.

Чистое «доказательство существования». Оно никак не помогает найти выигрышную стратегию.

Нужно ли среднему человеку (условно говоря – «балерине») знать приведенные мной примеры? – Конечно, нет. Нужно ли понимать, о чем шла речь в предыдущих абзацах? Непремененно.

Математика и этические принципы

Понятно, что решение математических задач полезно всякому, просто потому, что ум требует упражнений – независимо от того, чем вы собираетесь заниматься. Достаточно часто говорят и о четкости мысли, о том, что математика «ум в порядок приводит» (Ломоносов). Но крайне редко говорят об этическом аспекте.

А между тем в науке вообще, и в математике прежде всего, очень силен этический элемент. Он состоит не в том, что наука проповедует какие-то этические нормы. Во-первых, не проповедует, а во-вторых, подобная проповедь редко приносит какой-то эффект. Она делает гораздо более важную вещь: заставляет быть честным.

Всякому человеку следует быть честным. Можно проповедовать честность (дело малополезное, в особенности потому, что чаще всего проповедники сами не без греха). Можно подавать пример честности; это несколько полезнее, но тоже не самое лучшее.

А можно принуждать к честности: не угрозами, а силой необходимости. Математика именно это и делает: она принуждает быть честным. И это много лучше рассказов о хороших и плохих детях, или даже личного примера.

В классической математике, если ты утверждаешь, что получил такой-то результат, ты обязан предъявить доказательство. Если оно у тебя есть – значит, ты сказал правду. Если у тебя его нет – тебя просто не будут слушать. Дело не в том, что врать опасно – врать *бессмысленно*, врать невозможно: журнал не опубликует результат без доказательства.

Сверх того, математика учит самоцензуре, а точнее, требует от каждого жесткой самоцензуры.

Делая столь провокационное утверждение, я, конечно же, вызываю на себя шквал возмущенных возгласов: ведь сегодня принято без всяких доказательств и без всяких аргументов утверждать, что цензура вообще крайне вредна, а уж самоцензура, мол – едва ли не самый опасный вид цензуры.

Тем не менее я настаиваю на своем утверждении: математика учит всякого самоцензуре, и это одно из важнейших ее достоинств.

Что получается из свободы без самоцензуры – это все видят на заборах и на интернет-форумах. А в математике – пишете ли вы текст для публикации, или, пока что, просто набросок своих идей – вы все равно считаетесь, не можете не считаться с тем, что

в какой-то момент сказанное придется доказывать... или отказаться от своих слов, как необоснованных.

Но самоцензура важна еще и по другой причине. Да, она необходима, чтобы быть ответственным человеком; необходима, чтобы быть честным и не болтать что в голову взбредет, не заботясь об аргументах. Но сверх того, она крайне полезна еще и тем, что она развивает фантазию.

Та мысль, что математика развивает фантазию, далеко не оригинальна. Я могу сослаться на авторитет одного из величайших математиков XIX–XX веков Давида Гильберта (1860–1940): «Ах, вы про этого моего бывшего ученика? Вы знаете, он стал поэтом. Для математика у него недоставало воображения».

Так оно и есть.

Поэту, писателю-фантасту чересчур богатое воображение иметь не обязательно – что и демонстрируют современные фантастические романы.¹² Всякий может написать что-то вроде: «я сел в машину времени, перелетел на миллион лет назад, оказался в другой галактике и охотился там на огненных драконов». Но подобное нагромождение никак друг с другом не связанных допущений – явное доказательство отсутствия воображения.

А как ведет себя человек, наделенный воображением?

Вспомним для примера Уэллса. Он вводит совершенно фантастическое предположение: человека можно сделать невидимым. Но никаких других нелепых предположений он уже не делает; он выжимает из своей идеи все. Это и есть фантазия.

Неплохое описание такого фантазера (или, если угодно, лжеца) дает Джером К. Джером.

Его герой рассуждает о рыболовах. Все они врут. Но ведь врать – это тоже искусство. Каждый, мол, может войти в пивную и сказать: я вчера поймал пять дюжин рыб. Это свидетельствует только о наглости. Настоящий рыболов ведет себя не так. – И далее герой Джерома рассказывает, как настоящий рыболов (врун, фантазер) приходит в пивную, не спеша садится, слушает других, потом вскользь замечает: «Н-да... о том, что я поймал вчера, пожалуй, и рассказывать не стоит... поскольку мне все равно никто не поверит», – и начинает обстоятельный рассказ, как он за весь день практически ничего не поймал – «десятка два щучек и две дюжины подлещиков не в счет», и наконец, уже под вечер, леса натянулась, «я понял, что клюнуло что-то стоящее»... – ну,

¹² Есть, конечно, исключения вроде Станислава Лема, которого уж никак не обвинишь в бедности фантазии, – но как мало таких исключений!

и так далее. Фантазия – не в количестве идей, а в умении выжать из своей идеи все, что возможно.

Если говорить о современной литературе, то в качестве «контрпримера» к моему утверждению можно привести хотя бы роман Хайнлайна «Пасынки Вселенной». Хайнлайн не просто строит роман о путешествии в огромном космическом корабле – этот корабль за несколько столетий стал обществом, культурой со своими священными текстами, своей мифологией: роль Бога-Творца играет некий Джордан (на самом деле, как выясняется по ходу романа, Джордан – просто меценат, создатель Фонда Джордана, который отправил корабль), Хафф – в роли дьявола, виновного в Грехопадении и пр., и так далее. Хайнлайн не просто придумал идею; он сумел интересно ее развернуть. Но это, повторяю, исключение. Как правило же, автор просто выстреливает идеями – одной за другой. Это не фантазия, это вещь, прямо ей противоположная.

Столь же бедна фантазия нынешних авторов детективов. И опять-таки бедность их фантазии видна из того, сколько параллельных линий они нагромождают в одной книге.

В «Лунном камне» Уилки Коллинза (я привожу его, как положительный пример, для контраста) все вертится вокруг одного-единственного вопроса. И автору хватило фантазии, чтобы написать вокруг этого довольно толстый роман.

А нынешние авторы на это не способны, и потому накручивают пять, шесть разных сюжетов в один роман. Тут одно убийство, там второе (никак с первым не связанное), а тут еще ограбление, тоже чисто случайно произошедшее здесь же и в то же время. И все они намечены лишь пунктиром, потому что развить сюжет как следует у автора нехватает умения, нехватает фантазии.

Но вернемся к математике.

Математик вынужден быть фантазером: без фантазии не придумать никакого доказательства. При этом он не может просто бросить в мир какую-нибудь идею.

Идея должна, во-первых, «проходить»: я нафантазировал какой-то факт, но я теперь обязан доказать, что он верен, что моя идея проходит. А во-вторых, это еще должно быть кому-то нужно. Второй критерий трудно четко сформулировать, но на математических семинарах любят по окончании доклада говорить примерно такую фразу:

– Очень интересно... Но я не понял, какая от этого польза может быть для народного хозяйства.

Слова «народное хозяйство» надо, разумеется, понимать в переносном или уж, во всяком случае, в предельно расшири-

тельном смысле. Тем не менее это не просто шутка. Подразумевается, что действительно, от предложенной теории должен быть какой-то прок, пусть не «для народного хозяйства». Если вводится новый метод, новая идея, то весьма желательно, к примеру, чтобы она годилась не только для данной задачи.

Но главное все-таки – что надо не просто вообразить себе какую-то идею, а суметь придумать такую идею, которую еще и доказать можно. А это, конечно, гораздо более сильное требование к фантазии, чем те требования, которые предъявляются к поэту.

Математика и истина

Математика вводит и еще один запрет. Вам запрещается сомневаться в установленных истинах.

Здесь я опять иду против течения. Ибо сегодня крайне модно, напротив, говорить об «альтернативных теориях», и издеваться над той школой, которая дает истину в окончательном виде.

Разумеется, можно согласиться с тем, что *после того*, как молодой человек выучился и понял, что именно верно, а что неверно – ему не мешает понять также и то, что наука может далеко не все, и что есть очень много вопросов (собственно говоря – большинство вопросов), где истина пока еще не установлена; может быть, и никогда не будет установлена; где существуют разные версии, каждая из которых заслуживает внимания. Это верно, но... этому нужно учиться ПОТОМ. После того, как вы поняли, что окончательная, непреложно установленная истина существует (этому опять-таки учит математика), и именно такие истины надо знать в первую очередь. Тогда уже можно и полезно вносить антитезис, слегка корректирующий этот тезис.

Но начинать обучение с того, что истина, якобы, не окончательна, не абсолютна – в высшей степени вредно. Прежде всего потому, что это неверно.

А как же, – спросит кто-нибудь, – Эйнштейн, который поправил Ньютона? Ответ прост: этого не было.

Ньютон установил законы природы. Эйнштейн ничего в них не пересматривал; это невозможно. А в чем же он, в таком случае, поправил Ньютона?

Дело в том, что помимо законов, которые Ньютон четко сформулировал (и в которых не требуется никаких «уточнений»), были еще и некоторые утверждения, которые ни Ньютон,

ни другие физики никогда не формулировали ввиду их полной очевидности. Прежде всего это принцип «время не зависит от выбора системы координат».

Вот эти-то само собой разумеющиеся принципы и оказались неверны (или не совсем точны) и потребовали изменений. Вполне вероятно, что и в дальнейшем будет замечено, что современная физика подразумевает некоторые «совершенно очевидные» вещи, которые, тем не менее, неверны; и новый Эйнштейн внесет соответствующие поправки. Но это не будут поправки в установленные законы.

* * *

Незнание математики, в известном смысле (и если не гнаться за точностью выражения), равнозначно вере в абсолютную свободу. «Ну и что из того, — говорят невежественные люди, — что скорость света — предел всех скоростей? Вот наука чего-нибудь придумает, и мы будем летать быстрее...»

Точно так же ферматисты твердо уверены: что из того, что неразрешимость проблемы трисекции угла строго доказана, а невозможность найти мало-мальски элементарное (близкое к элементарному) решение проблемы Ферма продемонстрирована трудами десяти поколений великих? Надо просто не быть «научным сухарем», проявить кое-какую фантазию, свободу мысли, и задача как-нибудь решится. Потом они присылают эти решения в университеты, в горсовет, в ЦК партии... Впрочем, к чести советских чиновников я хочу сказать, что они, как правило, игнорировали ферматистов, хотя сочинять отписки на их жалобы все-таки приходилось.

* * *

По той же причине люди, не знающие математики, любят говорить о «неэвклидовом разуме». Они представляют себе дело примерно так: евклидова геометрия утверждает, что параллельные не могут пересечься, а мне это не нравится. Это ограничивает мою свободу. Так, наверно, можно придумать другую, неэвклидову геометрию (геометрию Лобачевского), в которой они могут также и пересечься...

Прежде всего, это фактически неверно. Это знает каждый математик. Но я хотел бы подчеркнуть другое.

Я не разделяю мнения об евклидовой геометрии как о клетке, ограничивающей нашу свободу; но если бы разделял — то обязан был бы сказать о неэвклидовой словами Ежи Леца: «Ну, пробил головой стену. И что ты будешь делать в соседней камере?» —

Разве только то, что окно в соседней не слева, а справа – если это вас утешит...

Если Дания – тюрьма, то и весь мир тюрьма; если эвклидова геометрия – клетка, из которой надо вырваться – то неэвклидова геометрия – это другая клетка. А они верят не в то, что есть другая, неэвклидова геометрия (это-то чистая правда), а в то, что в этой другой, «альтернативной» геометрии законы математики не обязательны. Им хочется, чтобы параллельные где-нибудь пересеклись. Правда, в неэвклидовой геометрии они не пересекаются *тем более*, но что им за дело? Им хочется свободы; а в математике (впрочем, как и во всех других сферах бытия) свобода должна идти рука об руку с необходимостью.¹³ Той свободы, которой они хотят, в математике нет.

Мысль, которую я критикую, была в предельно абсурдной форме выражена в некоем американском научно-фантастическом рассказе (Р.Джоунс, «Уровень шума». Б-ка фантастики, 1967, том 10). Содержание рассказа вкратце таково. Собирают группу выдающихся ученых; им сообщают, что недавно явился некий изобретатель, продемонстрировал антигравитационный аппарат; к несчастью, в ходе эксперимента аппарат взорвался, изобретатель погиб, и теперь надо как-то восстановить его изобретение.

Ученые вначале несколько смущены: они ведь знают, что антигравитация невозможна. Однако поскольку им убедительно продемонстрировано, что она существует, они начинают искать решение, и через некоторое время его успешно находят. Изобретают антигравитацию. После этого им сообщают, что на самом деле никакого изобретения не было: это был просто-напросто психологический прием, чтобы «избавить их от мусора в голове», т.е. от знаний, что какая-то задача неразрешима.

«Все, что необходимо сделать, – утверждает ничтоже сумняшеся герой рассказа в финале, – это избавиться от лишнего груза предрассудков, от окаменевшего мусора в голове... и тогда удастся найти *нужный* ответ на *любую* проблему...» (курсив мой – А.Т.)

¹³ Тут уместно вспомнить формулу Энгельса о том, что свобода, мол, есть осознанная необходимость. Раньше этой формулой полагалось восхищаться, теперь положено над ней хихикать. Но разумный смысл ей, во всяком случае, придать можно. Он состоит в том, что всякий человек, да и всякое живое существо отчасти свободно, отчасти нет. Но ваша свобода будет тем больше, чем яснее вы понимаете, каковы наложенные на нее ограничения. Если же вы не хотите учиться, не хотите ничего знать об этих ограничениях – вы не станете от этого свободнее.

Разумеется, это антинаучный бред. Наука (в отличие от журналистов) знает то, что следует знать каждому: что есть окончательно установленные научные истины, причем чаще всего эти истины выражены, как раз, в форме запрета. Невозможно построить «вечный двигатель». Параллельные прямые не могут пересечься. Не может быть скорости выше скорости света.

Впрочем, хочу оговориться. В той постановке вопроса, которая дана в рассказике, тоже есть, все-таки, некоторый смысл. Всякий математик знает: задачу много легче решать, если уверен, что решение существует; в противном случае все время колеблешься, что, собственно, делать: решать или доказывать несуществование решения; доказывать теорему или строить к ней контрпример.

Но это относится к случаям, где истина в последней инстанции пока что не установлена.

А журналисты считают, что «если нельзя, но очень хочется, то можно». И наперебой издеваются над советской школой, которая, дескать, «учила единственно верной истине». Как, — говорят журналисты, — может быть «единственно верная»?

Между тем цель науки (любой точной науки, а прежде всего, разумеется, математики) именно в том, чтобы установить истину в последней инстанции, ту, которая уже не пересматривается.

А как же новое познание?

Не беспокойтесь!

Выдающийся российский филолог М.Гаспаров писал, что когда в университете один из преподавателей мимоходом сказал им: «по этому вопросу одни думают так-то, другие так-то, а общего мнения нет» — для студентов-филологов это было откровением, «это было ошеломляюще», поскольку до того им с кафедры объявляли только истины в последней инстанции.

Математикам это не грозило никогда. И не только потому, что в математике полагается не вещать, а доказывать, но еще и потому, что математика, как никакая наука, переполнена нерешенными проблемами. И чтение любой математической книги подобно блужданию в темноте по чулану, битком набитому мебелью с острыми углами: стоит вам чуть отклониться от своего пути или просто неосторожно выставить локоть — и вы тут же больно ушибетесь об острый угол очередной нерешенной проблемы.

Новое познание безгранично. Слишком много есть в мире неизвестного, такого, где мы пока что не знаем истину в последней инстанции (или вообще ничего не знаем). Пока что, во всяком случае, нет причин опасаться, что такие вопросы будут исчерпаны.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
Сокращения	4
Задачи	5
Задачи на шахматной доске	5
Геометрия	7
Теория чисел	12
Алгебра	16
Взвешивания	21
Игры	22
Комбинаторика; разное	24
Задачи для самостоятельного размышления	30
Решения	32
Что такое математика, или метаматематика для нематема- тиков	115
Математика и Буратино	118
Зачем нужно уметь считать?	123
Зачем балерине математика?	129
Математические понятия	132
Математика и этические принципы	148
Математика и истина	151

А.Толпыго

130 НЕСТАНДАРТНЫХ ЗАДАЧ

Библиотечка «Квант». Выпуск 124
Приложение к журналу «Квант» №2/2012

Редактор *А.Ю.Котова*

Обложка *А.Е.Пацхверия*

Макет и компьютерная верстка *Е.В.Морозова*

Компьютерная группа *Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева*

Формат 84×108 1/32. Бум. офсетная. Гарнитура кудряшевская
Печать офсетная. Объем 5 печ.л. Тираж: 1-й завод 900 экз.
Заказ № 5321

119296 Москва, Ленинский пр., 64-А, «Квант»

Тел.: (495)930-56-48, e-mail: math@kvantjournal, phys@kvantjournal

Отпечатано «ТДДС-СТОЛИЦА-8»

Тел.: 8(495)363-48-86, <http://capitalpress.ru>

**ВЫШЛИ ИЗ ПЕЧАТИ КНИГИ СЕРИИ
«БИБЛИОТЕЧКА «КВАНТ»**

1. *М.П.Бронштейн*. Атомы и электроны
2. *М.Фарадей*. История свечи
3. *О.Оре*. Приглашение в теорию чисел
4. Опыты в домашней лаборатории
5. *И.Ш.Слободецкий, Л.Г.Асламазов*. Задачи по физике
6. *Л.П.Мочалов*. Головоломки
7. *П.С.Александров*. Введение в теорию групп
8. *В.Г.Штейнгауз*. Математический калейдоскоп
9. Замечательные ученые
10. *В.М.Глушков, В.Я.Валах*. Что такое ОГАС?
11. *Г.И.Копылов*. Всего лишь кинематика
12. *Я.А.Сморodinский*. Температура
13. *А.Е.Карпов, Е.Я.Гук*. Шахматный калейдоскоп
14. *С.Г.Гиндикин*. Рассказы о физиках и математиках
15. *А.А.Боровой*. Как регистрируют частицы
16. *М.И.Каганов, В.М.Цукерник*. Природа магнетизма
17. *И.Ф.Шарыгин*. Задачи по геометрии: планиметрия
18. *Л.В.Тарасов, А.Н.Тарасова*. Беседы о преломлении света
19. *А.Л.Эфрос*. Физика и геометрия беспорядка
20. *С.А.Пикин, Л.М.Блинов*. Жидкие кристаллы
21. *В.Г.Болтянский, В.А.Ефремович*. Наглядная топология
22. *М.И.Башмаков, Б.М.Беккер, В.М.Гольховой*. Задачи по математике: алгебра и анализ
23. *А.Н.Колмогоров, И.Г.Журбенко, А.В.Прохоров*. Введение в теорию вероятностей
24. *Е.Я.Гук*. Шахматы и математика
25. *М.Д.Франк-Каменецкий*. Самая главная молекула
26. *В.С.Эдельман*. Вблизи абсолютного нуля
27. *С.Р.Филонович*. Самая большая скорость
28. *Б.С.Бокштейн*. Атомы блуждают по кристаллу
29. *А.В.Бялко*. Наша планета – Земля
30. *М.Н.Аршинов, Л.Е.Садовский*. Коды и математика
31. *И.Ф.Шарыгин*. Задачи по геометрии: стереометрия
32. *В.А.Займовский, Т.Л.Колупаева*. Необычные свойства обычных металлов
33. *М.Е.Левинштейн, Г.С.Симин*. Знакомство с полупроводниками
34. *В.Н.Дубровский, Я.А.Сморodinский, Е.Л.Сурков*. Релятивистский мир
35. *А.А.Михайлов*. Земля и ее вращение

36. *А.П.Пурмаль, Е.М.Слободецкая, С.О.Травин.* Как превращаются вещества
37. *Г.С.Воронов.* Штурм термоядерной крепости
38. *А.Д.Чернин.* Звезды и физика
39. *В.Б.Брагинский, А.Г.Полнарев.* Удивительная гравитация
40. *С.С.Хилькевич.* Физика вокруг нас
41. *Г.А.Звенигородский.* Первые уроки программирования
42. *Л.В.Тарасов.* Лазеры: действительность и надежды
43. *О.Ф.Кабардин, В.А.Орлов.* Международные физические олимпиады школьников
44. *Л.Е.Садовский, А.Л.Садовский.* Математика и спорт
45. *Л.Б.Окунь.* α , β , γ ... Z: элементарное введение в физику элементарных частиц
46. *Я.Е.Гегузин.* Пузыри
47. *Л.С.Марочник.* Свидание с кометой
48. *А.Т.Филиппов.* Многоликий солитон
49. *К.Ю.Богданов.* Физик в гостях у биолога
50. Занимательно о физике и математике
51. *Х.Рачлис.* Физика в ванне
52. *В.М.Липунов.* В мире двойных звезд
53. *И.К.Кикоин.* Рассказы о физике и физиках
54. *Л.С.Понтрягин.* Обобщения чисел
55. *И.Д.Данилов.* Секреты программируемого микрокалькулятора
56. *В.М.Тихомиров.* Рассказы о максимумах и минимумах
57. *А.А.Силин.* Трение и мы
58. *Л.А.Ашкинази.* Вакуум для науки и техники
59. *А.Д.Чернин.* Физика времени
60. Задачи московских физических олимпиад
61. *М.Б.Балк, В.Г.Болтянский.* Геометрия масс
62. *Р.Фейнман.* Характер физических законов
63. *Л.Г.Асламазов, А.А.Варламов.* Удивительная физика
64. *А.Н.Колмогоров.* Математика – наука и профессия
65. *М.Е.Левинштейн, Г.С.Симин.* Барьеры: от кристалла до интегральной схемы
66. *Р.Фейнман.* КЭД – странная теория света и вещества
67. *Я.Б.Зельдович, М.Ю.Хлопов.* Драма идей в познании природы
68. *И.Д.Новиков.* Как взорвалась Вселенная
69. *М.Б.Беркинблит, Е.Г.Глаголева.* Электричество в живых организмах
70. *А.Л.Стасенко.* Физика полета
71. *А.С.Штейнберг.* Репортаж из мира сплавов
72. *В.Р.Полищук.* Как исследуют вещества
73. *Л.Кэрролл.* Логическая игра

74. *А.Ю.Гроссберг, А.Р.Хохлов.* Физика в мире полимеров
75. *А.Б.Мигдал.* Квантовая физика для больших и маленьких
76. *В.С.Гетман.* Внуки Солнца
77. *Г.А.Гальперин, А.Н.Земляков.* Математические бильярды
78. *В.Е.Белонучкин.* Кеплер, Ньютон и все-все-все...
79. *С.Р.Филонович.* Судьба классического закона
80. *М.П.Бронштейн.* Солнечное вещество
81. *А.И.Буздин, А.Р.Зильберман, С.С.Кротов.* Раз задача, два задача...
82. *Я.И.Перельман.* Знаете ли вы физику?
83. *Р.Хонсбергер.* Математические изюминки
84. *Ю.Р.Носов.* Дебют оптоэлектроники
85. *Г.Гамов.* Приключения мистера Томпкинса
86. *И.Ш.Слободецкий, Л.Г.Асламазов.* Задачи по физике (2-е изд.)
87. Физика и...
88. *А.В.Спивак.* Математический праздник
89. *Л.Г.Асламазов, И.Ш.Слободецкий.* Задачи и не только по физике
90. *П.Гнэдиг, Д.Хоньек, К.Райли.* Двести интригующих физических задач
91. *А.Л.Стасенко.* Физические основы полета
92. Задачник «Кванта». Математика. Часть 1
93. Математические турниры имени А.П.Савина
94. *В.И.Белотелов, А.К.Звездин.* Фотонные кристаллы и другие метаматериалы
95. Задачник «Кванта». Математика. Часть 2
96. Олимпиады «Интеллектуальный марафон». Физика
97. *А.А.Егоров, Ж.М.Раббот.* Олимпиады «Интеллектуальный марафон». Математика
98. *К.Ю.Богданов.* Прогулки с физикой
99. *П.В.Блиох.* Радиоволны на земле и в космосе
100. *Н.Б.Васильев, А.П.Савин, А.А.Егоров.* Избранные олимпиадные задачи. Математика
101. У истоков моей судьбы...
102. *А.В.Спивак.* Арифметика
103. *Я.А.Смординский.* Температура (3-е изд.)
104. *А.Н.Васильев.* История науки в коллекции монет
105. *И.Ф.Акулич.* Королевские прогулки
106. Исаак Константинович Кикоин в жизни и в «Кванте»
107. *Г.С.Голицын.* Макро- и микромиры и гармония
108. *П.С.Александров.* Введение в теорию групп (2-е изд.)
109. *А.В.Спивак.* Арифметика-2
110. *П.Г.Крюков.* Лазер – новый источник света

111. *А.Б.Сосинский*. Узлы. Хронология одной математической теории
112. *А.П.Пятаков, П.П.Григал*. Лаборатория на коленке
113. *А.А.Заславский*. Олимпиады имени И.Ф.Шарыгина
114. *С.В.Коновалихин*. Сборник качественных задач по физике
115. *Е.Я.Гук*. Математика и шахматы
116. *Л.К.Белопухов*. Физика внезапного
117. *Н.Б.Васильев, А.А.Егоров*. Задачи всесоюзных математических олимпиад. Часть 1
118. Задачник «Кванта». Физика. Часть 1
119. *Н.Б.Васильев, А.А.Егоров*. Задачи всесоюзных математических олимпиад. Часть 2
120. Задачник «Кванта». Физика. Часть 2
121. *Н.Б.Васильев, В.Л.Гутенмахер, Ж.М.Раббот, А.Л.Тоом*.
Заочные математические олимпиады
122. *А.З.Долгинов*. Строение материи: от атомов до Вселенной
123. Задачник «Кванта». Физика. Часть 3



Библиотечка КВАНТ

130



НЕСТАНДАРТНЫХ ЗАДАЧ

ВЫПУСК

124